

**REGINALDO DE OLIVEIRA**

**OTIMIZAÇÃO DOS PESOS DAS OBSERVAÇÕES GEODÉSICAS PELO  
PROBLEMA DE VALOR PRÓPRIO INVERSO COM CONSIDERAÇÕES  
SOBRE O PLANEJAMENTO DA CONFIABILIDADE DA OBSERVAÇÃO**

Tese apresentada ao Curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas, Departamento de Geomática, Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ciências Geodésicas.

Orientador: Prof. Dr. Quintino Dalmolin.

**CURITIBA  
2007**

Oliveira, Reginaldo de

Otimização dos pesos das observações geodésicas pelo problema de valor próprio inverso com considerações sobre o planejamento da confiabilidade da observação / Reginaldo de Oliveira. — Curitiba, 2007.

xiii, 171 f.: il.; tab.

Orientador: Quintino Dalmolin

Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná.

1. Ajustamento (Geodesia). 2. Redes (Geodesia). 3. Otimização matemática. I. Dalmolin, Quintino. II. Título.

CDD 20 526.51

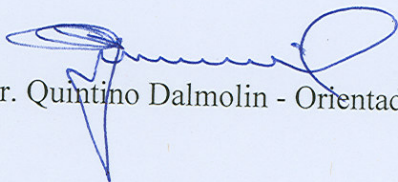
**“OTIMIZAÇÃO DOS PESOS DAS OBSERVAÇÕES  
GEODÉSICAS PELO PROBLEMA DE VALOR PRÓPRIO  
INVERSO COM CONSIDERAÇÕES SOBRE O  
PLANEJAMENTO DA CONFIABILIDADE DA OBSERVAÇÃO”**

**POR**

**REGINALDO DE OLIVEIRA**

Tese nº 054 aprovada como requisito parcial do grau de Doutor no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, pela Comissão formada pelos professores:

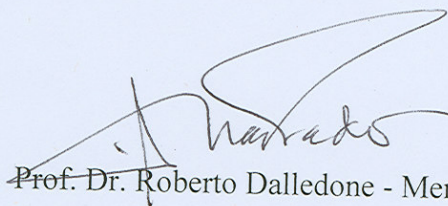
Curitiba, 24 de agosto de 2007.



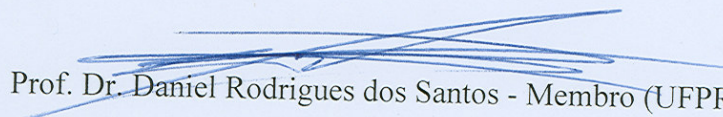
Prof. Dr. Quintino Dalmolin - Orientador e Presidente (UFPR)



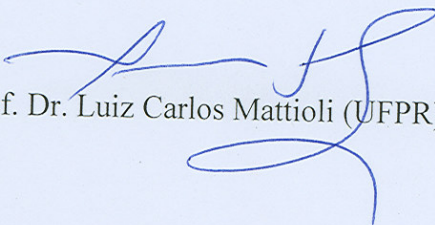
Prof. Dr. Sílvio Jacks dos Anjos Garnés – Membro (UNIDERP)



Prof. Dr. Roberto Dalledone - Membro (UFPR)



Prof. Dr. Daniel Rodrigues dos Santos - Membro (UFPR)



Prof. Dr. Luiz Carlos Mattioli (UFPR)

## DEDICO

todo este trabalho à minha esposa Angela  
Maria de Oliveira, à minha filha Ana  
Clara Machado Schoroeder e Oliveira  
ainda ao Prof. Quintino Dalmolin: cada  
página deste trabalho tem a alma de vocês.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus pela força diária.

Ao meu pai Nélcio Schoroeder de Oliveira.

A minha mãe Marlene de Oliveira.

A minhas irmãs Neide de Oliveira e Cleide de Oliveira.

À Dr<sup>a</sup> Claudia Pereira Krueger coordenadora do Curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas.

À Mônica Verali Kleuser Reguilin Secretária do curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas pela presteza e companheirismo.

Ao Prof. Luis Carlos Matioli pela paciência e auxílio.

Aos professores do Curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas.

Aos funcionários, professores e alunos do Colégio Estadual Dr. Munhoz da Rocha (Guaragi).

Aos Colegas do curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas pelo companheirismo em especial aos colegas Jaime, Daniel, Edie e Rossevelt pela ajuda quando precisei.

Aos profissionais da Biblioteca de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>vii</b>
<b>LISTA DE QUADROS .....</b>	<b>viii</b>
<b>LISTA DE SIGLAS .....</b>	<b>ix</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS .....</b>	<b>x</b>
<b>RESUMO .....</b>	<b>xii</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>xiii</b>
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE PROJETOS DE REDES GEODÉSICAS .....	4
1.2 JUSTIFICATIVA .....	9
1.3 HISTÓRICO SOBRE A OTIMIZAÇÃO DE REDES GEODÉSICAS .....	10
1.4 OBJETIVOS .....	12
1.4.1 OBJETIVO GERAL .....	12
1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	12
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>13</b>
2.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS .....	13
2.1.1 Valores e Vetores Próprios: Especial e Generalizado .....	13
2.1.2 Matriz dos Pesos .....	15
2.1.3 Ajustamento de Observações pelo Método dos Mínimos Quadrados na Forma Paramétrica .....	18
2.1.4 Problema de Valor Próprio Inverso .....	21
2.1.4.1 Problema de valor próprio inverso aditivo .....	22
2.1.4.2 Problema de mínimos quadrados de valor próprio inverso .....	23
2.1.5 Otimização: Minimização Irrestrita .....	23
2.1.5.1 Estratégias de globalização para o método de Newton: busca linear e região de confiança.....	27
2.1.5.1.1 Algoritmo de descida com busca linear .....	30
2.1.5.1.2 Método de região de confiança .....	34
2.1.5.2 Método LP para um problema de valor próprio inverso .....	39
2.1.6 Minimização com restrições .....	42
2.1.6.1 Lagrangeano Aumentado .....	43
2.1.6.1.1 Função de penalidade coerciva pela direita .....	46
2.1.6.1.2 Penalidades da família P .....	47
2.1.7 Critérios de Confiabilidade .....	48
2.1.8 Detecção de Erros Grosseiros .....	49
2.1.8.1 Erros: Tipo I e Tipo II .....	50
2.1.8.2 Redundância parcial .....	53
2.1.8.3 Relação entre resíduo e erros grosseiros .....	55
2.1.8.3.1 Localização de erro grosseiro .....	58
2.1.8.3.2 Confiabilidade interna de uma rede geodésica.....	60
2.1.8.4 Confiabilidade externa de uma rede geodésica .....	64
2.1.8.5 Confiabilidade externa local .....	65

2.1.8.6 Confiabilidade externa geral de uma rede geodésica .....	66
2.2 OTIMIZAÇÃO DOS PESOS PARA MELHORAR A CONFIABILIDADE DA OBSERVAÇÃO .....	68
2.2.1 Formulação do Planejamento de Segunda Ordem para Confiabilidade .....	69
<b>3 METODOLOGIA: A OTIMIZAÇÃO DOS PESOS BASEADA EM UM PROBLEMA DE VALOR PRÓPRIO INVERSO .....</b>	<b>76</b>
3.1 OTIMIZAÇÃO DOS PESOS DAS OBSERVAÇÕES GEODÉSICAS BASEADA EM VALORES PRÓPRIOS .....	76
3.1.1 Problema de Valor Próprio Inverso Aplicado na Otimização dos Pesos em Levantamentos Geodésicos .....	79
3.2 FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA UM PROBLEMA DE VALOR PRÓPRIO INVERSO .....	80
3.2.1 Formulação Numérica para um Problema de Valor Próprio Inverso Aplicado na Otimização dos Pesos .....	81
3.2.2 Método de Newton Puro para Solução da Formulação II .....	82
3.2.3 Estratégias Globalizadas para o Método de Newton: Busca Linear e Região de Confiança .....	84
3.2.3.1 Método de Newton com busca linear .....	85
3.2.3.2 Método de Newton com região de confiança .....	87
3.2.4 Método LP para um problema de valor próprio inverso .....	89
3.3 ALGORITMO DE LAGRANGEANO AUMENTADO .....	92
3.4 CRITÉRIOS DE OTIMALIDADE PARA REDES GEODÉSICAS .....	95
3.5 TESTE PARA A IGUALDADE DE VALORES PRÓPRIOS .....	96
3.6 RESTRIÇÕES AOS PESOS BASEADA EM CRITÉRIOS DE CONFIABILIDADE .....	98
3.7 OTIMIZAÇÃO ESPECTRAL .....	104
<b>4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>109</b>
4.1 EXPERIMENTOS SOBRE OTIMIZAÇÃO IRRESTRITA .....	109
4.1.1 Experimento 1 .....	111
4.1.2 Experimento 2 .....	116
4.1.3 Experimento 3 .....	122
4.2 EXPERIMENTO SOBRE OTIMIZAÇÃO RESTRITA .....	129
4.2.1 Experimento 1 .....	129
4.2.1.1 Experimento 1: Otimização com Restrições .....	132
4.2.1.1.1 Restrição aos pesos quanto à precisão da observação .....	132
4.2.1.1.2 Restrição aos pesos quanto à confiabilidade das observações .....	136

4.2.1.1.3 Aplicação dos métodos restritos: Experimento 1 .....	139
4.2.2 Experimento 2 .....	141
4.2.1.1 Experimento 2: Otimização com Restrições .....	143
4.2.1.1.1 Restrição aos pesos quanto à precisão da observação .....	143
4.2.1.1.2 Restrição aos pesos quanto à confiabilidade das observações .....	144
4.2.1.1.3 Restrição aos pesos definindo um número de redundância mínimo .....	146
4.2.1.1.3 Aplicação dos métodos restritos: Experimento 2 .....	148
<b>5 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>150</b>
5.1 CONCLUSÕES .....	150
5.2 RECOMENDAÇÕES .....	152
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>153</b>
<b>APÊNDICE A- MÉTODO DE VARIAÇÃO DE COORDENADAS</b>	
<b>FÓRMULAS DIFERENCIAIS.....</b>	<b>158</b>
<b>APÊNDICE B -INVERSA GENERALIZADA E INVERSA GENERALIZADA</b>	
<b>DE MOORE-PENROSE .....</b>	<b>164</b>
<b>ANEXO - MONOGRAMAS .....</b>	<b>168</b>



## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1	- ESTABELECIMENTO DE UMA REDE GEODÉSICA .....	5
FIGURA 2.1	- COMPRIMENTO DO PASSO .....	29
FIGURA 2.2	- REGIÃO DE CONFIANÇA .....	30
FIGURA 2.3	- CONDIÇÃO DO ÂNGULO .....	32
FIGURA 2.4	- REGIÃO DE CONFIANÇA APROXIMADO .....	37
FIGURA 2.5	- COMPARATIVO: REGIÃO DE CONFIANÇA E O PASSO DE NEWTON .....	39
FIGURA 2.6	- ERRO TIPO I E ERRO TIPO II .....	52
FIGURA 2.7	- PLANEJAMENTO DA CONFIABILIDADE .....	72
FIGURA 3.1	- EXEMPLO DA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO ESPECTRO DE UMA MATRIZ .....	77
FIGURA 3.2	- GEOMETRIA DO MÉTODO LP .....	90
FIGURA 3.3	- PRECISÃO E CONFIABILIDADE .....	99
FIGURA 3.4	- PRECISÃO E CONFIABILIDADE EM PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO .....	100
FIGURA 4.1	- REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO PLANEJAMENTO DE UM PONTO EM COORDENADAS CARTESIANAS .....	111
FIGURA 4.2	- PROJETO DE REDES GEODÉSICAS: GEOMETRIA PARA OBTENÇÃO DE DOIS PONTOS EM COORDENADA HORIZONTAIS.....	116
FIGURA 4.3	- REDE GEODÉSICA BIDIMENSIONAL .....	122
FIGURA 4.4	- REDE GEODÉSICA BIDIMENSIONAL: DISTÂNCIAS E ÂNGULOS...	130
FIGURA 4.5	- REDE GEODÉSICA BIDIMENSIONAL I .....	141
FIGURA A1	- REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO AZIMUTE DA DIREÇÃO I-J...	157
FIGURA A2	- OBSERVAÇÃO DE ÂNGULO.....	159

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 2.1	- INTERVALO PARA A CONTROLABILIDADE DAS OBSERVAÇÕES	55
QUADRO 2.2	- VALORES PARA O PARÂMETRO DE NÃO CENTRALIDADE .....	63
QUADRO 2.3	- COORDENADAS HORIZONTAIS: PLANEJAMENTO DA CONFIABILIDADE DA OBSERVAÇÃO .....	72
QUADRO 4.1	- COORDENADAS HORIZONTAIS I .....	112
QUADRO 4.2	- RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO: BUSCA LINEAR, REGIÃO DE CONFIANÇA E LP. ....	114
QUADRO 4.3	- VALORES PRÓPRIOS : EXPERIMENTO 1 .....	115
QUADRO 4.4	- COORDENADAS HORIZONTAIS II .....	117
QUADRO 4.5	- RESULTADO DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO DOS PESOS .....	120
QUADRO 4.6	- VALORES PRÓPRIOS: EXPERIMENTO 2 .....	120
QUADRO 4.7	- COORDENADAS HORIZONTAIS DE UMA REDE GEODÉSICA BIDIMENSIONAL .....	123
QUADRO 4.8	- PESOS OBTIDOS PELOS MÉTODOS: LP, BUSCA LINEAR E REGIÃO DE CONFIANÇA .....	127
QUADRO 4.9	- VALORES PRÓPRIOS: EXPERIMENTO 3 .....	127
QUADRO 4.10	- COORDENADAS FIXAS E APROXIMADAS DA REDE GEODÉSICA	130
QUADRO 4.11	- RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO DOS PESOS COM RESTRIÇÃO DE EQUIPAMENTO .....	134
QUADRO 4.12	- RESULTADO: OTIMIZAÇÃO DOS PESOS COM RESTRIÇÃO DE EQUIPAMENTO E NÃO NEGATIVIDADE .....	135
QUADRO 4.13	- OTIMIZAÇÃO DOS PESOS COM RESTRIÇÃO DE CONFIABILIDADE.....	137
QUADRO 4.14	- NÚMERO DE REDUNDÂNCIA EM FUNÇÃO DOS PESOS OBTIDOS NO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO .....	138
QUADRO 4.15	- VALORES CALCULADOS PARA A CONFIABILIDADE EXTERNA GERAL .....	139
QUADRO 4.16	- RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO DOS PESOS IRRESTRITA I .....	140
QUADRO 4.17	- RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO DOS PESOS COM RESTRIÇÃO DE EQUIPAMENTO II.....	143
QUADRO 4.18	- OTIMIZAÇÃO DOS PESOS COM RESTRIÇÃO DE CONFIABILIDADE .....	145
QUADRO 4.19	- NÚMERO DE REDUNDÂNCIA EM FUNÇÃO DOS PESOS OBTIDOS NO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO .....	145
QUADRO 4.20	- VALORES CALCULADOS PARA A CONFIABILIDADE EXTERNA GERAL I.....	146
QUADRO 4.21	- OTIMIZAÇÃO DOS PESOS COM RESTRIÇÃO DE CONFIABILIDADE $r_{i,min} = 0,3$ .....	147
QUADRO 4.22	- NÚMERO DE REDUNDÂNCIA PARA OS PESOS OBTIDOS NO PROCESSO .....	148
QUADRO 4.23	- RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO DOS PESOS IRRESTRITA II .....	149

## LISTA DE SIGLAS

GPS *Global Positioning System*;

PVPI Problema de Valor Próprio Inverso;

LP *lift and projection*

K.K.T. Karush-Kuhn-Tucker

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $m_c$  : representação de um modelo quadrático obtido utilizando a expansão truncada de ordem 2 de Taylor;
- $M_k$  : modelo quadrático obtido para aplicação do método de região de confiança
- $R_{++}$  : conjunto dos número reais estritamente positivos;
- $R^n$  : espaço n-dimensional dos números reais;
- $\in$  : relação de pertinência (pertence);
- $\mathbf{x}^+$  : representa o vetor minimizador de um modelo quadrático ( neste caso não representa a pseudo-inversa de um vetor);
- $\mathbf{x}^*$  : representa um vetor minimizador (local ou global) de uma função qualquer;
- $\lambda_*$  : representação de um escalar (utilizado no método de região de confiança);
- $\lambda^*$  : valor próprio pretendido em um processo de otimização dos pesos;
- $\mu_i$  : i-ésimo valor próprio associado a matriz de covariâncias dos parâmetros estimados em um processo de otimização dos pesos
- $\mu$  : escalar utilizado no método de Newton com busca linear o qual garante a positividade da matriz hessiana;
- $\sigma$  : representa uma permutação de valores próprios associado ao método LP (*lift and projection*)
- $\sigma_0^2$  : variância da unidade de peso *a priori*;
- $\hat{\sigma}_0^2$  : variância da unidade de peso *a posteriori*;
- $\nabla f$  : indicação do gradiente de uma função;
- $\Delta$  : raio da região de confiança;
- $\Lambda^*$  : matriz diagonal que apresenta em sua diagonal principal um conjunto de valores próprios pré-definidos;
- $-1$  : indicação de inversa ordinária quando sobrescrito no símbolo da matriz;
- $t$  : indicação da transposta de uma matriz quando sobrescrito no símbolo da matriz;
- $+$  : indicação da inversa generalizada de Moore-Penrose ou pseudo-inversa quando sobrescrito no símbolo da matriz ou vetor (exceto para  $\mathbf{x}^+$ );
- $\|(\bullet)\|$  : norma euclidiana de um vetor qualquer;
- $\sum_{i=1}^p$  : indica somatório desde i até p;

$\prod_{i=1}^p$  : indica produtório desde i até p;

! : deve ser;

$\stackrel{=}{\text{def}}$  : por definição;

$\rightarrow$  : indicação de uma transformação;

## RESUMO

Neste trabalho apresenta-se o problema de otimização dos pesos das observações que é aplicado no planejamento de redes geodésicas. O objetivo é planejar uma rede de forma que atenda a critérios de precisão pré-estabelecidos. A partir da especificação de uma precisão para a rede o problema é modelado utilizando-se como critério os valores próprios da matriz de covariâncias onde obtém-se os pesos que satisfazem a precisão especificada. A solução é alcançada resolvendo-se um problema de valor próprio inverso que é não linear. Apresentam-se os fundamentos matemáticos sobre a otimização numérica, os quais possibilitam a aplicação de métodos globalizados na solução de um problema não linear. O problema de valor próprio inverso é solucionado na sua forma irrestrita globalizando o método de Newton usando as estratégias busca linear e região de confiança. O método LP (*lift and projection*) é apresentado para solução de um problema de valor próprio inverso irrestrito. Amplia-se o planejamento de redes geodésicas estabelecendo critérios de restrição a equipamentos e critérios de confiabilidade sobre as observações com o objetivo de planejar uma rede precisa e confiável frente a erros grosseiros. Esta situação é resolvida pelo algoritmo de Lagrangeano Aumentado que é um método restrito. Os resultados são analisados e discutidos.

Palavras chave: Otimização; Otimização do Pesos; Problema de Valor Próprio Inverso; Método Global; Lagrangeano Aumentado; Critério de Precisão; Critério de Confiabilidade.

## ABSTRACT

In this work the problem of optimization of the weights of the observations is presented that is applied in the planning of geodetic network. The objective is to plan a form net that takes care of the daily pay-established criteria of precision. From the specification of a precision for the net the problem is shaped using itself as criterion the eigenvalues of the covariance matrix where it gets the weights that satisfy the precision specified. The solution is reached deciding an inverse eigenvalue problem that is nonlinear. The mathematical basis is presented on the numerical optimization, which make possible the application of global methods in the nonlinear problem solution. The inverse eigenvalue problem is solved in its unconstrained form by global Newton's method using the line search and trust region strategies. Method LP (lift and projection) is presented for solution of inverse eigenvalue problem unconstrained. The planning of geodetic network is extended establishing restriction criteria the equipment and criteria of reliability on the observations with the objective to plan an accurate net and reliable net front the gross errors. This situation is decided by the algorithm of Augmented Lagrangian that is a constrained method. The results are analyzed and argued.

Key words: Optimization; Optimization of the Weights; Inverse Eigenvalue Problem; Global Method's; Augmented Lagrangian ;Criteria of Precision; Criteria of Reliability

## 1 INTRODUÇÃO

A Geodésia é a ciência que tem por objetivo determinar a forma e as dimensões da Terra e os parâmetros definidores do campo de gravidade (GEMAEL, 1994, p. 15).

Qualquer medida tomada apresenta erros em relação ao possível valor verdadeiro da grandeza que se quer medir. Estes erros são provenientes de causas como, falhas humanas, efeitos físicos e equipamentos imperfeitos. Para minimizar tais erros repete-se a mensuração várias vezes. Com a pluralidade e discrepância deste conjunto de observações obriga-se a extrair um resultado único e que apresente maior confiança na grandeza medida. Isto é possível por meio de técnicas que levam as observações a serem ajustadas com um modelo matemático, permitindo depurar erros grosseiros, evidenciar erros sistemáticos e corrigi-los levando a obtenção de um resultado único e com alto grau de confiabilidade.

Muitas vezes as observações não apresentam o mesmo grau de confiança, então, podem-se atribuir pesos diferenciados valorizando as que apresentam melhor qualidade. Para tanto a atribuição de pesos às observações pressupõe o conhecimento da precisão de cada medida.

O problema de otimização de pesos é conhecido na literatura geodésica como planejamento ou projeto de segunda ordem no qual se conhece a matriz planejamento  $A$ , também conhecida como matriz dos coeficientes ou matriz de configuração e, os pesos são tratados como incógnitas.

A idéia básica da otimização dos pesos para uma rede geodésica está no fato de que fornecida a sua configuração, pode-se estimar a qualidade da rede antes de qualquer medição ser realizada. Esta idéia possibilita analisar detalhadamente o projeto com respeito a sua precisão, confiabilidade, custos e ainda melhorar partes da rede, se necessário.

Assim, se pode obter pesos otimizados para as observações fazendo-se uso de modelos “ótimos” para as matrizes de covariâncias dos parâmetros estimados as quais são chamadas de matrizes-critério. Desta forma, qualquer matriz definida positiva ou semi-definida positiva pode ser usada como uma matriz critério desde que represente



uma situação ideal para a precisão, uma vez que não há necessidade de que a matriz de covariâncias efetivamente obtida na prática seja igual à matriz critério. Um caso particular de uma matriz critério homogênea e isotrópica é a matriz identidade, isto é,

$$\mathbf{Q}_x = \mathbf{I}$$

Uma outra possibilidade de otimização de pesos é o uso de valores próprios. Tendo em vista que o uso dos valores próprios e vetores próprios é um diagnóstico da qualidade de um ajustamento, pode-se formular a otimização de pesos das observações geodésicas por meio de condições impostas aos valores próprios da matriz de covariâncias, ou seja, os valores próprios da matriz de covariâncias apresentam-se como função objetivo no processo de otimização dos pesos das observações. Em regra pretende-se que a rede apresente valores próprios pré-estabelecidos.

Esta situação tem resolução através da solução iterativa de um Problema de Valor Próprio Inverso aplicado sobre a matriz dos coeficientes das equações normais.

Alguns métodos para solução do problema de valor próprio inverso, baseados no método de Newton clássico (ou puro) podem ser encontrados em FRIEDLAND et al. (1987, p. 639-643).

Outras técnicas para solução do problema de valor próprio inverso, especificamente na otimização podem ser aplicadas. Modela-se o problema por meio de uma função de minimização para a qual serão utilizados, iterativamente, modelos quadráticos explorando a possibilidade da utilização de métodos que melhorem as garantias de solubilidade do problema.

Os métodos utilizados para solução da função de minimização são: o Método de Newton no qual se utilizam as estratégias de globalização do método por busca linear e região de confiança; e especificamente na solução de um problema de valor próprio inverso, o método LP (*lift and projection*), que não faz uso nem de derivadas primeiras nem de segundas. Cada método é aplicado na otimização dos pesos com base em um problema de valor próprio inverso variando-se a configuração da rede e ainda o número de valores próprios pré-definidos que a matriz de covariâncias da rede deve apresentar.

O problema da otimização de pesos é ampliado quando outros aspectos são considerados. Quando, por exemplo, quando há um conhecimento a priori sobre os instrumentos que podem ser utilizados para realizar um levantamento. Como exemplo para esta situação considera-se uma rede geodésica em que três instrumentos, com precisões respectivamente de:  $\sigma_1 = 1 \text{ mm}$ ,  $\sigma_2 = 2 \text{ mm}$  e  $\sigma_3 = 3 \text{ mm}$ , estão disponíveis para fazer uma observação de distância. Considerando ainda que  $p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$

( $i = 1, 2, 3$ ) o maior peso que poderá ser aproveitado no resultado da otimização será  $p = 1$ , ou seja, interessa as soluções para o problema tal que  $p \leq 1$ . Como no exemplo anterior, em determinadas situações há uma restrição natural aos pesos no processo de otimização. Caso contrário, quando a instrumentação não oferecer restrição, a solução do processo será irrestrita, isto é, qualquer solução interessa ao problema.

Outro aspecto a ser considerado no processo de otimização dos pesos é a confiabilidade da observação, representado pela sua redundância parcial  $r_i$  (redundância parcial da  $i$ -ésima observação) com  $0 \leq r_i \leq 1$  e expressa a contribuição de cada observação  $\ell_i$  para a redundância total  $r$  do sistema associada ao método dos mínimos quadrados. Interpretam-se os limites de  $r_i$  como: se  $r_i = 1$  significa que 100% de qualquer erro grosseiro introduzido na observação  $\ell_i$  será revelado no resíduo e se  $r_i = 0$  significa que não há controle sobre a observação em relação à erros grosseiros uma vez que este não afeta o resíduo em seu todo e portanto não pode ser detectado (KAVOURAS, 1982 p. 23). Quanto maior a redundância parcial da observação maior será o controle desta quanto a erros grosseiros. Assim é desejável conceber uma rede geodésica com  $r_i$ 's relativamente grandes e possivelmente uniformes para que a controlabilidade das observações frente a erros grosseiros seja a mesma em todas as partes desta rede.

Segundo BAARDA (1977) o conceito de acurácia de uma rede geodésica consiste de duas partes: precisão e confiabilidade para a rede. Neste contexto podem-

se considerar os dois aspectos no processo de otimização. Precisão dos parâmetros representados pelo valor próprio da matriz de covariâncias e ainda confiabilidade da observação considerada no seu número de redundância. Desta forma os pesos obtidos para a rede projetada devem atender a critérios pré-estabelecidos de precisão para os parâmetros e confiabilidade para observações.

Com isto, considera-se a redundância da observação ainda na fase de planejamento da rede geodésica, para que o peso contemple além de uma precisão pré-definida para os parâmetros também uma controlabilidade pré-definida para cada observação. Esta situação tem possibilidade de solução com a aplicação de métodos numéricos de otimização matemática com restrições (otimização restrita) e em particular a aplicação do método de Lagrangeano Aumentado.

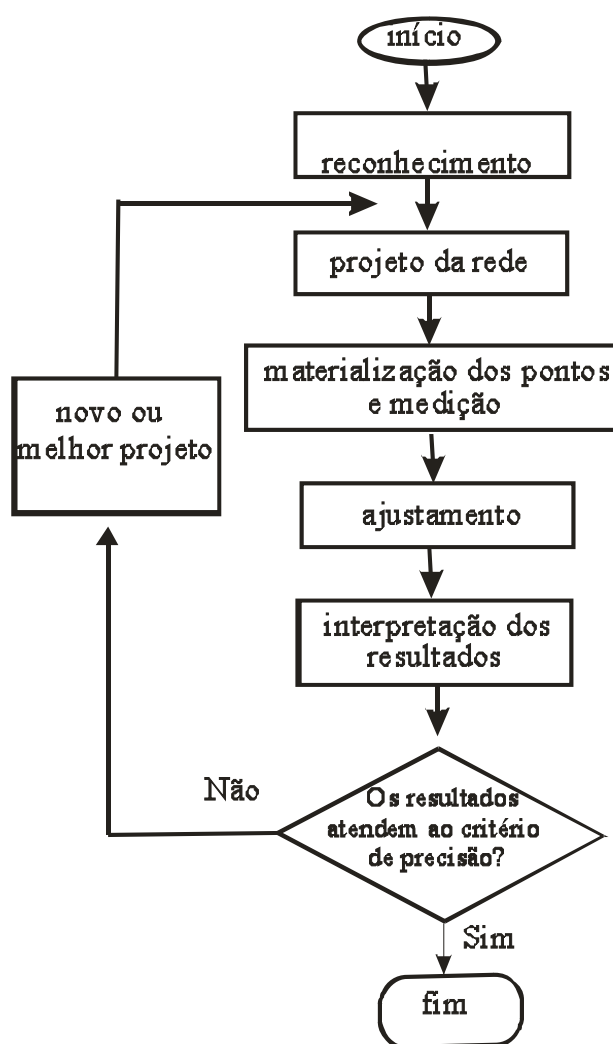
## 1.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE PROJETOS DE REDES GEODÉSICAS

Uma rede geodésica é constituída por um conjunto de pontos materializados no terreno com suas posições definidas em relação a um sistema geodésico de referência. Para sua determinação são utilizadas medições geodésicas que podem ser observações de ângulos, direções, distâncias, diferenças de níveis associadas a observações gravimétricas e ainda por técnica astronômica ou por Geodésia espacial, por exemplo, observações do GPS. A importância de se planejar ou projetar uma rede geodésica, para posterior implantação, está no fato de que se pretende para o levantamento geodésico a obtenção de posições precisas e confiáveis após o ajustamento da rede e ainda, se possível, reduzir custos para sua execução. Com a finalidade de alcançar o objetivo de precisão, confiabilidade e custo reduzido, em geral, a experiência é a linha de conduta de um geodesta na concepção da rede geodésica.

O projeto da rede é concluído após um reconhecimento no campo, onde a escolha dos pontos pode ser mantida ou alterada por problemas de visibilidade, rigidez geométrica, acesso entre outros. Após o projeto concluído segue-se a campanha de medição onde observações (variável aleatória) são obtidas com a instrumentação

disponível. De posse dos valores observados as posições podem ser obtidas por meio de um ajustamento utilizando-se para isso, por exemplo, o Método dos Mínimos Quadrados. De forma geral a implantação de uma rede geodésica segue o fluxograma ou os passos apresentados na figura 1.1.

FIGURA 1.1- ESTABELECIMENTO DE UMA REDE GEODÉSICA



O sucesso na implantação da rede depende da qualidade final da mesma, que deve ser ótimo sob algum critério estabelecido em função da qualidade do projeto.

Após a obtenção das posições, por meio de um ajustamento, é necessário analisar a qualidade do levantamento, com o intuito de possibilitar a detecção de

deficiências (teste da variância e análise da precisão) e fragilidades (rigidez geométrica, número de redundância e erros grosseiros ) na rede.

Nesta concepção, deficiências e/ou fragilidades se forem detectadas, serão corrigidas ou ao menos minimizados os seus efeitos por meio de um novo levantamento em campo onde novos pontos serão escolhidos, outros equipamentos podem ser utilizados, outras medições ou remediações realizadas. Um novo ajustamento deverá ser realizado e conseqüentemente uma nova análise de qualidade deve ser feita. Todo este processo representa um gasto adicional, tanto do ponto de vista financeiro quanto de tempo e mesmo assim este novo trabalho pode não ter a precisão esperada.

Posteriormente a este trabalho algumas indagações são pertinentes ao levantamento:

a) O plano de observações (equipamentos, disposição dos pontos, tipo de observação) foi adequado?

b) A ocupação dos pontos foi realizada de forma a minimizar custos (tempo e financeiro)?

Para minimizar as deficiências que eventualmente podem ocorrer tanto durante quanto posterior a um levantamento muitas vezes a prática é a única ferramenta usada para melhorar a concepção de um levantamento.

A experiência é um dado que não deve ser descartado em um levantamento geodésico, porém métodos analíticos (ou não) juntamente com critérios de precisão, confiabilidade (rigidez) e custos são ferramentas matemáticas que podem ser utilizadas concomitantemente com a experiência, como linhas de conduta em um projeto geodésico.

Melhorar o conhecimento sobre a rede na fase de planejamento, minimizar fragilidades e corrigir deficiências, antes de qualquer campanha de medição é parte da Otimização do Projeto de Redes Geodésicas, que fornece as informações a cerca do trabalho a ser realizado, de tal forma que torna possível projetar e conceber melhor o levantamento. A otimização do projeto de redes geodésicas também é denominada pré-análise, uma vez que é realizada sem que se efetue qualquer medição nem o conseqüente ajustamento (SÁ, 1985, p. 9).

O termo otimização vem sendo utilizado, pela inserção de funções que representam precisão, confiabilidade e custo e ainda métodos computacionais de otimização que são ferramentas matemáticas utilizadas para maximizar ou minimizar funções sujeitas ou não a restrições nas variáveis.

Tradicionalmente, os problemas de otimização são classificados em 4 ordens, sendo que cada ordem é classificada de acordo com a grandeza que se quer obter no processo de otimização. Desta forma GRAFAREND (1974) classifica os projetos de otimização nas seguintes ordens:

- **Projeto de Zero Ordem:** trata de escolher um sistema de referência (datum) ótimo;
- **Projeto de Primeira Ordem:** trata de projetar uma configuração ótima para uma rede;
- **Projeto de Segunda Ordem:** seleção dos pesos para as observações que servirão de referência na realização de uma rede geodésica (pesos otimizados);
- **Projeto de Terceira Ordem:** inclusão de novas observações para melhorar uma rede já existente.

Quando os projetos de Primeira e Segunda ordem são resolvidos simultaneamente, este é chamado Projeto Combinado.

Basicamente os procedimentos que podem ser usados para resolver os problemas de otimização de redes geodésicas são o método de tentativa e erro e o método analítico.

O método de tentativa e erro é um método que visa projetar uma rede usando recursos de simulação em computador que incorpora técnicas empíricas e norteadas pela experiência do projetista. Nesta técnica postula-se uma solução, envolvendo critérios de custo e precisão, algumas redes são simuladas até que os critérios sejam satisfeitos. Se ocorrer que nenhum dos critérios seja satisfeito um novo plano é postulado (por exemplo, alterando o projeto original) e a rede é novamente simulada. O procedimento é repetido até que uma rede satisfatória seja encontrada (pode ocorrer ainda que esta rede não seja a ótima). Em resumo para uma dada rede que deve ser projetada por tentativa e erro se obedece os seguintes passos:

1. Especificar critérios para precisão e confiabilidade da rede;
2. Selecionar um plano de observações (pontos no terreno, tipos de observações e pesos)
3. Calcular a matriz de covariâncias dos parâmetros estimados e deduzir as quantidades que representam a precisão e a confiabilidade da rede.
4. Se os valores obtidos no passo 3 são satisfatórios com aqueles estabelecidos no passo 1 então vai para o passo 5; de outra forma altera-se o plano de observações (removendo observações ou diminuindo valor dos pesos se a rede é considerada “boa”, ou adicionando observações ou aumentando valor para os pesos se a rede não é suficiente “boa”) e retorna-se para o passo 3
5. Obter o custo da rede e considerar a possibilidade de retornar ao passo 2 e reiniciar com um tipo diferente de rede. Parar quando a rede ótima foi encontrada.

Um conjunto de precisões pré-definidas, as quais são idealizadas em um sentido ótimo para a rede, em geral são caracterizadas por círculos de erro idênticos (características de homogeneidade e isotropismo).

Os cálculos de um ajustamento simulado com as grandezas dadas nos passos (1), (2) e (3) são realizados e definem-se regiões de confiança para as posições da rede (parâmetros). Os resultados são comparados com as precisões pré-definidas e executa-se o passo (4). Caso as elipses de erro calculadas excedam as regiões limitadas pelos círculos de erro postulados, uma nova simulação é feita refinando-se a simulação anterior, seja entrando com novas observações ou subtraindo observações e/ou “melhorando” as precisões das observações anteriores. O procedimento é repetido até que uma rede satisfatória é encontrada. As grandezas obtidas no projeto final devem ser realizáveis no levantamento.

Os dados de entrada tendem a ser próximos do ideal quando o projetista usa sua experiência e habilidade. Neste sentido o método de tentativa e erro possibilita que o projetista use sua experiência para melhor simular a rede.

Em particular, os métodos analíticos oferecem algoritmos específicos para a solução de cada projeto e minimizam a intervenção humana nesta solução. O termo analítico é usado para descrever um método que resolve um projeto particular pela

aplicação de algum algoritmo matemático. A aplicação de tal algoritmo conduzirá automaticamente à solução de uma rede que irá satisfazer os requerimentos de qualidade pré-definidos e esta rede será ótima em algum sentido matemático.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

Este trabalho visa contribuir com uma metodologia para a otimização dos pesos em levantamentos geodésicos ou, em termos gerais, no estabelecimento de uma rede geodésica, quando esta necessita ser implantada para que atenda a uma precisão e/ou confiabilidade pré-definida para as observações. A metodologia utilizada é baseada em valores próprios cuja modelagem é solucionada com um problema de valor próprio inverso aplicando-se métodos da otimização irrestrita e restrita.

Dentro da concepção da otimização, considerações de confiabilidade podem ser introduzidas visto que a literatura específica sobre este problema não trata desta questão de forma algorítmica. Em um processo de otimização dos pesos podem ser introduzidos, tanto critérios de precisão quanto de confiabilidade, obtendo-se assim uma rede planejada precisa e confiável (do ponto de vista da detecção de erros grosseiros).

As garantias que o projeto da rede obterá êxito e a rede poderá ser otimizada são ampliadas com a aplicação de algoritmos de otimização matemática sobre uma função de minimização construída com o problema de valor próprio inverso. Melhoras na garantia de solubilidade podem ser alcançadas quando estratégias que globalizam o método de Newton para solução de um sistema não linear são aplicadas e ainda quando métodos específicos para solução do problema inverso são utilizados, por exemplo, o método LP.

Espera-se ainda que este trabalho contribua para facilitar o estudo e a aplicabilidade deste tema em levantamentos geodésicos que necessitem serem projetados objetivando uma melhor concepção do ajustamento e qualidade final do empreendimento em relação à precisão, confiabilidade e custos.



### 1.3 HISTÓRICO SOBRE A OTIMIZAÇÃO DE REDES GEODÉSICAS

O ponto inicial das técnicas de otimização analítica, objetivando medições geodésicas é devido à dissertação de F. R. Helmert de 1868, intitulada “*Studien über rationelle Vermessungen im Gebiet der höheren Geodäsie*”. Neste trabalho é proposto um modelo para racionalizar um levantamento, tentando encontrar regras para a localização de pontos de uma rede em função do tipo de medição e do número de observações. Helmert estabeleceu alguns postulados a respeito de um projeto ótimo (*optimal design*) que ainda hoje são aceitos. Como exemplo utilizou o valor mínimo do traço da matriz de covariâncias das coordenadas dos pontos estimados como critério de precisão e impôs ao planejamento restrições de custo. Nesta mesma linha outros geodestas fizeram contribuições como SCHEREIBER (1882), JUNG (1924), WOLF (1961). Todos buscavam minimizar alguma função objetivo que descreve custo, precisão ou confiabilidade em um projeto geodésico. Baarda em 1962 propôs uma metodologia alternativa, as chamadas matrizes critério as quais são uma melhor aproximação para a matriz de covariâncias dos parâmetros estimados. Estas matrizes-critério possuem uma estrutura ideal que é especificada em cada caso. No caso de redes geodésicas bi ou tridimensionais a estrutura ideal pode ser estabelecida pela estrutura de Taylo-Karman que foram introduzidas nas Ciências Geodésicas por Erik W. Grafarend em 1972. Em GRAFAREND e SCHAFFRIN (1979) matrizes com estrutura de Taylor-Karman foram apresentadas para observações de azimutes, ângulos e distâncias. Neste período é constituído pela Associação Internacional de Geodésia (IAG) um grupo especial de estudo neste campo sob o título “Otimização do Projeto de Redes Geodésicas”.

Nesta época muitos estudos eram devotados ao projeto de segunda ordem, porém aos aspectos de confiabilidade ainda não eram dadas as devidas atenções. Nesta concepção Van Mierlo em 1981 publicou o trabalho “*Second Order Design: precision and reliability aspects*” onde fez estudos sobre a associação entre a precisão e a confiabilidade quando o intuito é projetar uma rede. Em suma, os pesos obtidos para a

rede projetada devem atender critérios de precisão para os parâmetros e confiabilidade para as observações.

No Brasil em 1985 Carlos César Paiva de Sá apresentou a dissertação de mestrado intitulada Otimização de Observações em Redes Horizontais no qual utilizou matrizes-critério de covariâncias com estrutura Taylor-Karman para solucionar o projeto de segunda ordem em redes geodésicas horizontais.

O uso de valores próprios, de forma direta, em projetos de redes geodésicas tem seu ponto inicial no trabalho de Rene Jäger em 1988 intitulado “*Analyse und Optimierung geodätischer Netze nach spektralen Kriterien und mechanische Analogien*” no qual apresenta uma formulação matemática que possibilita extrair pesos se é estabelecido um conjunto de valores próprios para a matriz de covariâncias dos parâmetros estimados. Hubert Kaltenbach em 1992 apresentou a otimização da configuração da rede (Projeto de Primeira Ordem) baseado em um problema de valor próprio inverso onde soluciona um sistema de equações não-lineares utilizando o método de Newton clássico.

Neste mesmo período DEREN e YONGQIAN (1991) publicaram um método que possibilitou fornecer uma solução ao problema, de primeira e segunda ordem, da otimização da confiabilidade da observação construindo uma matriz-critério de confiabilidade obtida de forma empírica.

Vários pesquisadores vem contribuindo significativamente para a evolução e aplicabilidade da otimização em projetos de redes geodésicas. Em tempos recentes os problemas de otimização são tratados nos trabalhos de SCHMITT (1997), SCHWIEGER (2001), STOPAR (2001) e AMIRI-SIMKOOEI (2004) entre outros, os quais se ocuparam com os problemas de projetar redes geodésicas.

## 1.4 OBJETIVOS

### 1.4.1 OBJETIVO GERAL

Desenvolver um método para planejar e implantar redes geodésicas precisas e confiáveis considerando a otimização dos pesos pelo problema de valor próprio inverso e que atenda a disponibilidade instrumental para o levantamento.

### 1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- a) fundamentar a modelagem e solubilidade de um problema não linear aplicado à otimização dos pesos pelo problema de valor próprio inverso;
- b) analisar a aplicabilidade de algoritmos de otimização matemática em um problema de otimização dos pesos das observações modelados por um problema de valor próprio inverso;
- c) viabilizar os critérios de precisão e confiabilidade que possibilitem a otimização baseada na metodologia de um problema de valor próprio inverso aplicados a otimização de redes geodésicas;
- d) estabelecer uma metodologia para restrições aos pesos baseada em critérios de confiabilidade para uma rede geodésica;
- e) estabelecer uma metodologia que possibilite obter uma rede planejada de forma precisa e confiável.
- f) analisar os resultados da aplicabilidade da metodologia proposta na otimização de redes geodésicas bi-dimensionais;

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentam-se os conceitos necessários para fundamentação teórica da metodologia proposta e sua aplicação. Apresentam-se os conceitos sobre o problema de valor próprio e suas propriedades, matriz dos pesos das observações geodésicas, ajustamento de observações pelo método dos mínimos quadrados na forma paramétrica, o problema de valor próprio inverso que fundamenta a metodologia proposta juntamente com métodos numéricos para otimização irrestrita e restrita e ainda as considerações sobre a confiabilidade da observação.

### 2.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

#### 2.1.1 Valores e Vetores Próprios: Especial e Generalizado

Um vetor não nulo  $\mathbf{m}$  é dito ser um vetor próprio de uma matriz quadrada  $\mathbf{B}$  se existir um escalar  $\lambda$  tal que,

$$\mathbf{B}\mathbf{m} = \lambda\mathbf{m}. \quad (2.1)$$

Então  $\lambda$  é um valor próprio<sup>1</sup> especial de  $\mathbf{B}$ . Os valores próprios podem ser nulos, no entanto, o vetor próprio não.

A equação de grau  $n$ , expressa por

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (2.2)$$

é denominada equação característica e refere-se a uma matriz  $\mathbf{B}$  de ordem  $n \times n$ .

Resolvendo a equação característica relativa à  $\lambda$  obtêm-se os valores próprios de  $\mathbf{B}$ , que podem ser números reais ou complexos. Se um valor próprio é determinado pode-se substituí-lo na equação (2.1) e esta é resolvida para determinar os vetores próprios correspondentes a cada valor próprio. A expressão polinomial  $\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})$  é também conhecida por polinômio característico de  $\mathbf{B}$ .

---

<sup>1</sup> Na literatura podem ser encontradas outras denominações para valor próprio, tais como: autovalor, valor característico, raiz característica, raiz latente, raiz própria, auto-raiz.

Propriedades dos valores e vetores próprios (BRONSON,1993, p.80):

- a) A soma dos valores próprios de uma matriz é igual ao seu traço, que por sua vez é a soma dos elementos da diagonal principal;
- b) Vetores próprios correspondentes a diferentes valores próprios são linearmente independentes;
- c) Uma matriz é dita ser singular se e só se tiver ao menos um valor próprio nulo;
- d) Se  $\mathbf{m}$  for um vetor próprio de  $\mathbf{B}$  correspondente ao valor próprio  $\lambda$  não nulo e se  $\mathbf{B}$  possuir inversa, então  $\mathbf{m}$  é um vetor próprio de  $\mathbf{B}^{-1}$  correspondente ao valor próprio  $\frac{1}{\lambda}$ ;
- e) Se  $\mathbf{m}$  for um vetor próprio de uma matriz, então  $k \times \mathbf{m}$  também o será para qualquer constante  $k \neq 0$  e  $\mathbf{m}$  ou  $k \times \mathbf{m}$  correspondem ao mesmo valor próprio;
- f) Uma matriz e a sua transposta têm os mesmos valores próprios;
- g) Os valores próprios de uma matriz triangular superior ou inferior são os valores da sua diagonal principal;
- h) O produto de todos os valores próprios de uma matriz é igual ao determinante dessa matriz;
- i) Se  $\mathbf{m}$  for um vetor próprio da matriz  $\mathbf{B}$  correspondente ao valor próprio  $\lambda$ , então  $\mathbf{m}$  é um vetor próprio de  $\mathbf{B} - r\mathbf{I}$  correspondente ao valor próprio  $\lambda - r$  para qualquer escalar  $r$ ;
- j) Os valores próprios de uma matriz simétrica e real são sempre reais;
- l) Os valores próprios de uma matriz definida positiva, ver apêndice, são sempre positivos;
- m) Se  $\mathbf{B}$  é simétrica e  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , os vetores próprios correspondentes são ortogonais.

Se em vez da matriz identidade em (2.2) tiver uma matriz  $\mathbf{C}$ , haverá como ampliação do problema de valor próprio especial o problema de valor próprio geral definido por:

$$(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{C})\mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

em que  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  possuem as mesmas dimensões,  $n \times n$ . Em particular, no caso em que  $\mathbf{C}$  for não-singular será possível reconduzir (2.3) a um problema de valor próprio especial. Com efeito, pré-multiplicando ambos os membros da equação (2.3) por  $\mathbf{C}^{-1}$

$$(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B} - \lambda \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

e fazendo  $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{D}$  e ainda como  $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I}$  tem-se

$$(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

a qual coincide com a definição de um problema de valor próprio especial.

### 2.1.2 Matriz dos Pesos

Diz-se que a precisão de uma medida é tanto melhor quanto menor for sua variância, refletindo o grau de cuidado e refinamento instrumental. Inversamente, uma medida com baixa precisão tem uma variância maior.

Outra medida usada que quantifica a qualidade da observação é o peso a ela atribuído. Assim, para qualquer medida ou observação, maiores pesos refletem uma melhor precisão, em contrapartida pesos menores refletem menor precisão.

Desta maneira o peso  $p$  dado a uma observação é definido como uma quantidade que é inversamente proporcional a variância desta observação (MIKHAIL e GRACIE, 1981, p. 66), ou seja, tem-se mais confiança nas observações com menor variância. De forma geral,

$$p = \frac{k}{\sigma^2}, \quad (2.6)$$

onde  $k$  é uma constante de proporcionalidade.

Se é atribuído a uma observação peso unitário ( $p = 1$ ), sua variância é definida pelo símbolo  $\sigma_0^2$ . Da relação (2.6) decorre,

$$1 = \frac{k}{\sigma_0^2} \quad (2.7)$$

com isso

$$k = \sigma_0^2. \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) em (2.6) o peso dado a observação é definido como,

$$p = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}. \quad (2.9)$$

Desta forma, a constante de proporcionalidade  $\sigma_0^2$  é a variância da observação de peso unitário. Esta variância é referida por outras designações tais como, variância da unidade de peso e fator de variância.

Quando duas ou mais grandezas observadas estão envolvidas (como distâncias e ângulos), outras quantidades chamadas covariâncias podem ser determinadas. A covariância expressa o grau de dependência entre as observações, por exemplo, a dependência entre a observação de uma distância e de um ângulo. Para trabalhos práticos onde a covariância não é completamente determinada assume-se que as observações são não correlacionadas ou independentes, ou seja, as covariâncias são iguais a zero.

Considerando um conjunto de medidas não correlacionadas,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , com suas respectivas variâncias  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ , a matriz de covariâncias das observações é assumida ser uma matriz diagonal, como segue,

$$\Sigma_{\ell_b} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Os pesos dados, concordando com a equação (2.10), para estas medidas não correlacionadas são:

$$p_1 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}, \quad p_2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2}, \quad \dots, \quad p_n = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_n^2}. \quad (2.11)$$

Sendo  $\sigma_0^2$  uma constante de proporcionalidade obtém-se considerando (2.11) a seguinte relação:

$$p_1 \sigma_1^2 = p_2 \sigma_2^2 = \dots = p_n \sigma_n^2 = \sigma_0^2. \quad (2.12)$$

Colocando os pesos em uma matriz diagonal e designando-a por  $\mathbf{P}$ , chamada matriz dos pesos, tem-se

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Em vista do exposto em (2.11) a matriz  $\mathbf{P}$  torna-se,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} & & & \\ & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_n^2} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Fatorando  $\sigma_0^2$  na (2.14) resulta,

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & & \\ & \frac{1}{\sigma_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Com isso escreve-se (2.15) como,

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2 \boldsymbol{\Sigma}_{\ell_b}^{-1}. \quad (2.16)$$



A relação (2.16) é geral e aplica-se igualmente para observações correlacionadas e não correlacionadas (MIKHAIL e GRACIE, 1981, p. 68; GEMAEL, 1994, p. 105).

No caso particular em que  $\sigma_0^2 = 1$ , caso que é assumido no estágio de planejamento de uma rede geodésica (KUANG, 1996, p. 221), a relação (2.16) torna-se

$$\mathbf{P} = \Sigma_{\ell_b}^{-1} \quad (2.17)$$

ou seja, o peso dado a cada observação é estritamente o inverso da variância da observação. Esta condição permite considerar a variância da observação e em consequência sua precisão como incógnita, em processos de otimização de levantamentos geodésicos.

### 2.1.3 Ajustamento de Observações pelo Método dos Mínimos Quadrados na Forma Paramétrica

Um dos objetivos das medições geodésicas é a determinação de parâmetros como, por exemplo, as coordenadas de pontos sobre a superfície da Terra.

A aplicação do ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados na forma paramétrica possibilita calcular quantidades indiretamente, se estas se vinculam matematicamente a outras medidas as quais são obtidas de forma direta. Em geral os parâmetros têm valores aproximados no início do ajustamento e obtêm-se melhores estimativas ao final do procedimento. Estes parâmetros representam incógnitas funcionais e são tratados como variáveis aleatórias.

O modelo funcional que representa a ligação entre as  $m$  observações e as  $n$  incógnitas ou parâmetros é

$$\ell_a = f(x_a) \quad (2.18)$$

onde:  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é o modelo funcional,  $\ell_a$  representa o vetor dos valores observados ajustados e  $\mathbf{x}_a$  vetor dos parâmetros ajustados.

No modelo (2.18), os valores observados ajustados são expressos explicitamente como função dos parâmetros ajustados, modelo que caracteriza a forma paramétrica do método dos mínimos quadrados.

Designando por  $\mathbf{v}$  o vetor dos resíduos que conduzem os valores observados em valores ajustados rescreve-se a (2.18) como,

$$\ell_b + \mathbf{v} = f(\mathbf{x}_a), \quad (2.19)$$

onde  $\ell_b$  é o vetor dos valores observados.

A função do segundo membro em (2.19) normalmente é não-linear, neste caso, poderá ser linearizada em algum ponto  $\mathbf{x}_0$  pelo desenvolvimento da função em série de Taylor, desprezando os termos de ordem igual e superior a dois. Assim a equação (2.19) se torna,

$$\ell_b + \mathbf{v} = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) \cong f(\mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_a} \right|_{\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_0} \mathbf{x}, \quad (2.20)$$

onde  $\mathbf{x}_0$  representa o vetor dos valores aproximados e  $\mathbf{x}$  vetor das correções a esses parâmetros que transformam os parâmetros aproximados em ajustados.

Designando a função dos parâmetros aproximados por

$$f(\mathbf{x}_0) = \ell_0 \quad (2.21)$$

e por  $\mathbf{A}$  a matriz dos coeficientes, cujos elementos são os valores das derivadas parciais no ponto  $\mathbf{x}_0$  considerado,

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_a} \right|_{\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_0}. \quad (2.22)$$

Pode-se reescrever (2.20) como,

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \ell_0 - \ell_b. \quad (2.23)$$

Fazendo

$$\ell_0 - \ell_b = \ell \quad (2.24)$$

a equação (2.23) torna-se

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \ell. \quad (2.25)$$

Impondo a condição de Mínimos Quadrados Ponderado

$$\mathbf{v}^t \mathbf{P} \mathbf{v} = \text{mínimo} \quad (2.26)$$

ao sistema (2.25), obtém-se

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^t \mathbf{P} \ell \quad (2.27)$$

como solução geral do sistema (2.25), onde  $+$  é a indicação da pseudo-inversa ou inversa generalizada de Moore-Penrose (ver Apêndice B)

Os parâmetros aproximados são convertidos em ajustados por meio da expressão

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \quad (2.28)$$

O tratamento do método dos mínimos quadrados linear e não linear pode ser encontrado, por exemplo, em GARNÉS (2001) e GARNÉS (1996).

Na fase preparatória usam-se valores aproximados  $\mathbf{x}_0$  dos parâmetros  $\mathbf{x}_a$  como ponto de expansão da função  $f(\mathbf{x}_a)$  em série de Taylor, e, com o objetivo de linearizar a função, tomam-se apenas os dois primeiros termos da série. Tem-se consciência do erro de aproximação introduzido com esta linearização, erro este tanto menor quanto melhor forem os valores aproximados do vetor  $\mathbf{x}_0$  (DALMOLIN, 2002, p. 94).

Melhoram-se as estimativas de  $\mathbf{x}_0$  com iterações, sendo os primeiros resultados obtidos utilizados como valores aproximados melhorados na solução seguinte, e assim sucessivamente até que o processo iterativo atinja, caso exista, a convergência.

Após a obtenção dos parâmetros ajustados, calcula-se a matriz de covariâncias destes parâmetros, a qual permitirá a análise do ajustamento.

As observações efetuadas podem ser compreendidas como a realização de uma variável aleatória. Do ponto de vista estatístico as observações provém de uma amostra de uma população de média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , cujos parâmetros amostrais que estimam a média e a variância da população respectivamente são  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\sigma}^2$ . Com essas

considerações o vetor  $\ell = [\ell_1 \quad \ell_2 \quad \cdots \quad \ell_i \quad \cdots \quad \ell_n]^t$  é interpretado como um vetor aleatório n-dimensional cujas propriedades estatísticas estão descritas na matriz de covariâncias  $\Sigma_{\ell_b}$  a qual reúne as variâncias e covariâncias das componentes isoladas  $\ell_i$ . Se as observações não são correlacionadas tem-se para  $\Sigma_{\ell_b}$  uma matriz com covariâncias nulas e variâncias não nulas na diagonal principal.

Admitindo-se que as observações não possuem a mesma confiança, faz-se necessário a atribuição de pesos a essas observações, com a finalidade de valorizar as observações nas quais se tem maior confiança. Se as observações apresentam a mesma confiança os pesos dados são iguais. Neste caso, cada peso pode ser a unidade.

A matriz dos coeficientes de peso é dada na relação (2.16). Considerando a lei da propagação de covariâncias a matriz de covariâncias dos parâmetros ajustados para o caso geral, é expressa por (GEMAEL, 1994, p. 120):

$$\Sigma_{x_a} = Q_x = \sigma_0^2 (A^t P A)^+ = \sigma_0^2 N^+ \quad (2.29)$$

O valor estimado da variância da unidade de peso  $\sigma_0^2$  é obtida após ajustamento pela expressão

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^t \mathbf{P} \mathbf{v}}{r}, \quad (2.30)$$

onde  $r = n - u$  fornece o número de graus de liberdade.

#### 2.1.4 Problema de Valor Próprio Inverso

Um problema de valor próprio inverso diz respeito à construção de uma matriz com dados espectrais pré-estabelecidos. Os dados espectrais podem consistir de informações parciais ou completas dos valores próprios ou dos vetores próprios. O objetivo principal de um problema de valor próprio inverso está em obter uma matriz que preserve as propriedades espectrais pré-definidas.

No problema de valor próprio determinam-se os valores próprios para uma matriz quadrada. Em se tratando de valor próprio inverso o problema consiste em determinar uma matriz que possua valores próprios pretendidos, ou seja, se o problema é direto os valores próprios serão incógnitas e no problema inverso a matriz será a incógnita. De uma forma similar também se pode conceituar um problema de vetor próprio inverso.

Para conceituar um problema de valor próprio inverso (PVPI), considera-se a seguinte situação:

Seja a matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ , de ordem  $n$ , definida como,

$$\mathbf{A}(\mathbf{c}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{A}_k \quad (2.31)$$

onde  $\mathbf{A}_0$  e  $\mathbf{A}_k$  são matrizes reais e simétricas de dimensão  $n \times n$  e

$\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_j \ \dots \ c_n]^t$  um vetor que pertence ao espaço  $n$ -dimensional dos

números reais  $R^n$ . Denotando o conjunto dos  $n$  valores próprios de  $\mathbf{A}(\mathbf{c})$  por  $\lambda(\mathbf{c}) = \{\lambda_1(\mathbf{c}), \lambda_2(\mathbf{c}), \dots, \lambda_i(\mathbf{c}), \dots, \lambda_n(\mathbf{c})\}$ , com os elementos ordenados de forma crescente,  $\lambda_1(\mathbf{c}) \leq \lambda_2(\mathbf{c}) \leq \dots \leq \lambda_i(\mathbf{c}) \leq \dots \leq \lambda_n(\mathbf{c})$  encontrar o vetor  $\mathbf{c}$  que leva a matriz

(2.31) à apresentar os valores próprios pré-estabelecidos  $\lambda^* = [\lambda_1^* \ \lambda_2^* \ \dots \ \lambda_i^* \ \dots \ \lambda_n^*]^t$  cujos elementos também estão em ordem crescente.

Desta forma espera-se que para algum vetor  $\mathbf{c} = \mathbf{c}^*$ , se encontre a igualdade  $\lambda(\mathbf{c}^*) - \lambda^* = \mathbf{0}$ .

Estas considerações definem um problema de valor próprio inverso.

#### 2.1.4.1 Problema de valor próprio inverso aditivo

Definição:

Dados, matrizes  $n \times n$  reais e simétricas  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k, \dots, \mathbf{A}_n$  e números reais  $\lambda_1^* \leq \lambda_2^* \leq \dots \leq \lambda_n^*$  encontrar o vetor  $\mathbf{c} \in R^n$  de tal forma que os valores próprios

$\lambda_1(\mathbf{c}) \leq \lambda_2(\mathbf{c}) \leq \dots \leq \lambda_i(\mathbf{c}) \leq \dots \leq \lambda_n(\mathbf{c})$  da equação (2.31) satisfaçam a igualdade  $\lambda_i(\mathbf{c}) = \lambda_i^*$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

#### 2.1.4.2 Problema de mínimos quadrados de valor próprio inverso

Nas formulações práticas de um problema aditivo de valor próprio inverso freqüentemente ocorre que o número de parâmetros difere do número de valores próprios. Neste sentido considera-se a formulação de mínimos quadrados dada por,

$$\min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \left( \lambda_i(\mathbf{c}) - \lambda_i^* \right)^2 \quad (2.32)$$

Reescrevendo a definição, numa formulação de mínimos quadrados para o problema aditivo de valor próprio inverso tem-se o seguinte:

Dadas, as matrizes  $n \times n$  reais e simétricas  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k, \dots, \mathbf{A}_\ell$  e os números reais  $\lambda_1^* \leq \lambda_2^* \leq \dots \leq \lambda_m^*$ , com  $m \leq n$ , encontrar o vetor  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^\ell$  de tal forma que a função

$$f(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left( \lambda_i(\mathbf{c}) - \lambda_i^* \right)^2 \quad (2.33)$$

seja minimizada. Na relação (2.33)  $\lambda_i(\mathbf{c})$   $i = 1, 2, \dots, m$  são os valores próprios de

$$\mathbf{A}(\mathbf{c}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{A}_k.$$

### 2.1.5 Otimização: Minimização Irrestrita

Em programação linear ou não linear, às vezes chamada de otimização, busca-se maximizar ou minimizar algum objetivo (uma função). Quando esta função não tem nenhuma restrição o problema tratado é irrestrito e tem a formulação dada por,

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad (2.34)$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  é um vetor com  $n \geq 1$  componentes.

O problema de equações não lineares pode ser representado como,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

em que  $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função não-linear em  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

O método de Newton clássico ou puro não garante convergência global quando aplicado ao sistema dado em (2.35). Nestas condições para aceitar  $\mathbf{x}^{k+1}$  para a próxima iteração, é razoável esperar que  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{k+1})\|$  seja menor que  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^k)\|$  para alguma norma  $\|\bullet\|$ . Se, por conveniência, a norma escolhida é a euclidiana escreve-se,

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|_2^2 := \mathbf{F}(\mathbf{x})^t \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (2.36)$$

Se for requerido que, em cada passo do processo iterativo  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|_2$  diminua, formula-se uma função de minimização como,

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) := \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{x})^t \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (2.37)$$

Comparando a equação (2.35) com a formulação (2.37) percebe-se que uma solução para a equação (2.35) coincide com uma solução para (2.37). Então, pode-se tentar solucionar a (2.35) minimizando a (2.37), lembrando que nem sempre uma solução de (2.37) conduz a uma solução de (2.35). No entanto, em problemas práticos

isso dificilmente ocorre. Para isso ver, por exemplo, DENNIS Jr e SCHNABEL (1983).

Exemplo 2.1:

Considerando  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^3 - x_2^2 - 3 \\ 3x_1^2 - x_2 + 4 \\ x_1^4 - x_2 \end{bmatrix}$$

concordando com a relação (2.35) este pode ser apresentado como,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^3 - x_2^2 - 3 \\ 3x_1^2 - x_2 + 4 \\ x_1^4 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Formulando o problema de minimização, como exposto em (2.37) se escreve,

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[ (x_1^3 - x_2^2 - 3)^2 + (3x_1^2 - x_2 + 4)^2 + (x_1^4 - x_2)^2 \right].$$

Estratégias de solução para a (2.35) são baseadas na resolução do problema (2.37) fazendo uso de aproximações quadráticas de  $\mathbf{F}$ .

Neste caso usa-se uma aproximação quadrática para (2.37) e obtém-se o minimizador desta quadrática, em cada iteração, aplicando o método de Newton.

A aproximação de  $f$  em um ponto  $\mathbf{x}^k$ , por meio de uma função quadrática, utilizando a expansão truncada de ordem 2 de Taylor, é representada por,

$$m_c(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^k) + \nabla f(\mathbf{x}^k)^t (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)^t \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \quad (2.38)$$

onde,

$m_c(\mathbf{x})$  representa o modelo quadrático corrente ou modelo quadrático atual;



$f(\mathbf{x}^k) = \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{x}^k)^t \mathbf{F}(\mathbf{x}^k)$  é o valor numérico da função (2.37) no ponto  $\mathbf{x}^k$ ;

$\nabla f(\mathbf{x}^k) = \mathbf{J}(\mathbf{x}^k)^t \mathbf{F}(\mathbf{x}^k)$  é a avaliação do gradiente da função  $f(\mathbf{x}^k)$  no ponto  $\mathbf{x}^k$  e;

$\nabla^2 f(\mathbf{x}^k) = \mathbf{J}(\mathbf{x}^k)^t \mathbf{J}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{S}(\mathbf{x}^k)$  é a avaliação da matriz da segunda derivada da função (2.37) no ponto  $\mathbf{x}^k$ , com

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}^k) = \sum_{j=1}^m \left( \mathbf{F}_j(\mathbf{x}^k) \nabla^2 \mathbf{F}_j(\mathbf{x}^k) \right) \quad (2.39)$$

apresentando as informações sobre a segunda derivada da função  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  no ponto  $\mathbf{x}^k$ .

A matriz  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  é a matriz Jacobiana de  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , e escrita explicitamente fica,

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{F}_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_m(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{F}_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

A matriz  $\nabla^2 \mathbf{F}_j(\mathbf{x})$  é obtida da seguinte forma, para cada componente  $j$  de  $\mathbf{F}$ ,

tem a forma

$$\nabla^2 F_j(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_j(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F_j(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F_j(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F_j(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F_j(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 F_j(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F_j(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F_j(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F_j(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Do cálculo diferencial tem-se o resultado

$$\frac{\partial^2 F_j(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 F_j(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_i}, \quad j = 1, 2, \dots, m \text{ e } i, k = 1, 2, \dots, n \quad (2.42)$$

logo, a matriz dada em (2.41) é necessariamente uma matriz simétrica.

As grandezas apresentadas acima se fazem necessárias para a expansão truncada até o segundo termo, da série de Taylor, da função  $f$  que possibilita a solução do sistema de equações não-lineares representado por  $\mathbf{F}$ .

A condição necessária de primeira ordem, para  $\mathbf{x}^+$  ser um minimizador do modelo quadrático  $m_c$  é que o seu gradiente seja nulo, ou seja,  $\nabla m_c(\mathbf{x}^+) = \mathbf{0}$ . Isto corresponde ao seguinte algoritmo para minimização irrestrita:

### Algoritmo 2.1 (Método de Newton)

Dados  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  duas vezes diferenciável,  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$  em cada iteração  $k$ , resolver,

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) \mathbf{s}_k &= -\nabla f(\mathbf{x}^k) \\ \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \mathbf{s}_k \end{aligned} \quad (2.43)$$

Do ponto de vista da modelagem do problema, o exemplo 2.1 em cada passo vai para um ponto crítico do modelo local, que pode ser de mínimo, de máximo ou

ponto de sela. A minimização de  $f$  só faz sentido se  $\nabla^2 f(\mathbf{x})$  for definida positiva, isto é,  $\nabla^2 f(\mathbf{x}) > 0$  para que o valor crítico do modelo seja de mínimo.

Com estas considerações é razoável tentar modificar o método de Newton para que ele manifeste preferência por minimizadores.

Os métodos para resolver (2.37) são iterativos. Para definir estes algoritmos, usam-se direções ao longo das quais é possível fazer decrescer  $f(\mathbf{x})$ , ou seja,  $f(\mathbf{x}^{k+1}) < f(\mathbf{x}^k)$ .

#### 2.1.5.1 Estratégias de globalização para o método de Newton: busca linear e região de confiança

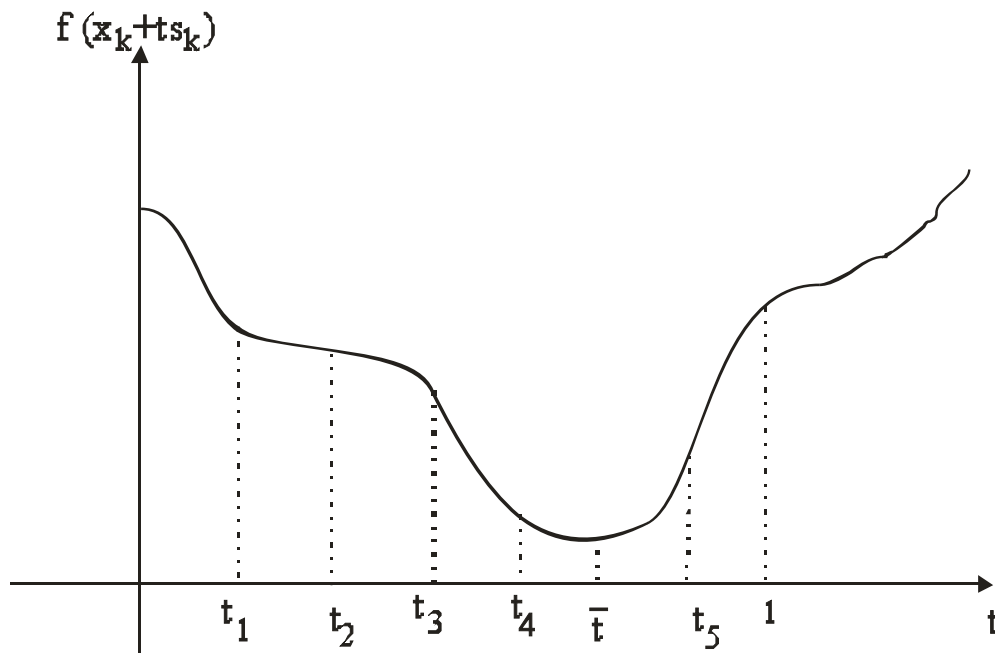
Para um ponto inicial arbitrário o método de Newton como apresentado no algoritmo 2.1, pode não convergir. As estratégias de busca linear e região de confiança globalizam o método de Newton, ou seja, a convergência independe do ponto utilizado para iniciar o método.

Na estratégia de busca linear, o algoritmo obtém uma direção  $\mathbf{s}_k$  e procura ao longo desta direção, a partir do ponto  $\mathbf{x}^k$ , um novo valor melhorado  $\mathbf{x}^{k+1}$  em que haja decréscimo da função objetivo. A distância, representada por  $t$ , que se deve mover ao longo de  $\mathbf{s}_k$ , pode ser encontrada de forma aproximada solucionando um problema de minimização unidimensional no qual se encontra o comprimento  $t$  do passo

$$\min_{t>0} f(\mathbf{x}^k + t\mathbf{s}_k) \quad (2.44)$$

Obtendo-se  $t$  de forma exata consegue-se o menor valor que a função objetivo alcança na direção  $\mathbf{s}_k$  porém, em geral, não é necessário obtê-lo de forma exata. Muitas vezes é suficiente obter um minimizador aproximado para o problema.

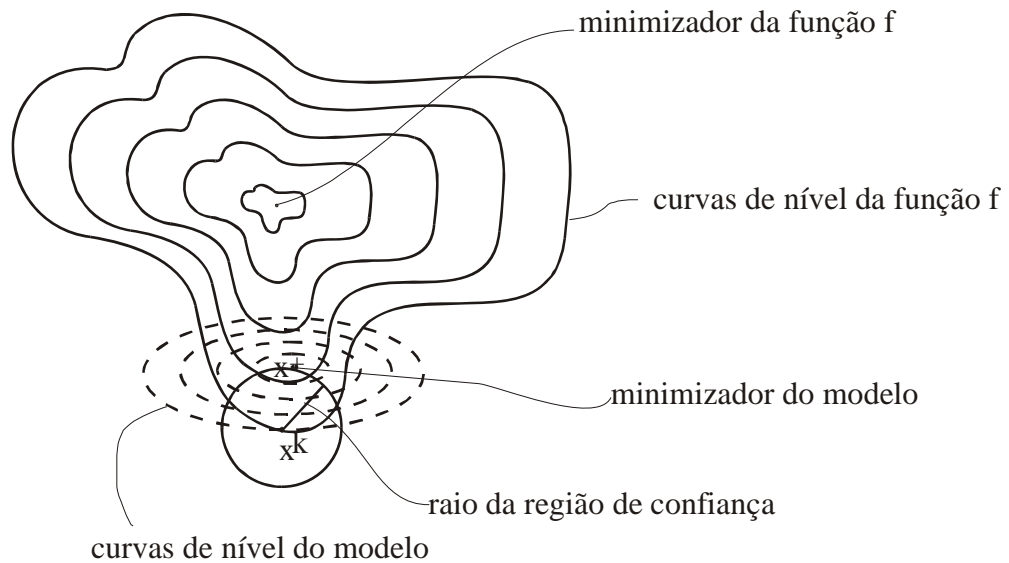
FIGURA 2.1-COMPRIMENTO DO PASSO



Na figura 2.1 o valor  $\bar{t}$  representa a solução exata do problema (2.44), porém observando a figura existem outros valores para  $t$ , no intervalo  $0 < t \leq 1$ , para os quais  $f$  alcança um valor menor que no ponto  $\mathbf{x}^k$ , o que justifica a nomenclatura minimizador aproximado. O algoritmo de busca linear gera uma quantidade de tentativas de comprimentos de passo até encontrar um que é o minimizador aproximado ou exato de (2.44). No novo ponto  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + ts_k$  uma nova direção de busca é obtida e também um novo valor para  $t$  é computado.

Uma segunda estratégia é conhecida como região de confiança. As informações obtidas sobre  $f$  são utilizadas para construir um modelo para a função, cujo comportamento deste modelo em uma região próxima ao atual valor  $\mathbf{x}^k$  é similar ao comportamento da função  $f$  na região em torno de  $\mathbf{x}^k$  como pode ser observado na figura 2.2.

FIGURA 2.2 –REGIÃO DE CONFIANÇA



Pelo fato que o modelo quadrático pode não ser uma boa aproximação de  $f$  quando  $\mathbf{x}^+$  está distante de  $\mathbf{x}^k$ , restringe-se a procura de busca para um minimizador do modelo em alguma região em torno de  $\mathbf{x}^k$ . De forma equivalente, encontra-se um passo solucionando o subproblema (ver figura 2.2),

$$\min_{\mathbf{s}_k} m_c(\mathbf{x}^k + \mathbf{s}_k) \quad (2.45)$$

onde  $\mathbf{x}^k + \mathbf{s}_k$  está limitado à região de confiança.

Se a solução não produz um decréscimo suficiente em  $f$ , conclui-se que a região não é adequada, então esta região é reduzida e soluciona-se novamente o subproblema (2.45).

#### 2.1.5.1.1 Algoritmo de descida com busca linear

Na relação 2.44, se o método utiliza a busca linear e o passo dado é o passo de Newton, de tamanho  $\mathbf{s}_k$ , ou seja,  $t = 1$ , então o minimizador do modelo quadrático é

representado por  $\mathbf{x}^+$ , e escrito explicitamente  $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}^k + \mathbf{s}_k$ . Observa-se ainda que o valor da função no ponto  $\mathbf{x}^+$  pode ser maior que em  $\mathbf{x}^k$ . Porém, retrocedendo o passo obtém-se um ponto em que o valor da função  $f$  diminuí, isto é,  $f(\mathbf{x}^k) < f(\mathbf{x}^+)$  ( ver figura 2.1). Neste contexto, se o passo de Newton é utilizado e o valor da função não diminuí satisfatoriamente, em geral, pode-se encontrar uma fração do tamanho do passo em que há diminuição do valor funcional.

No ponto  $\mathbf{x}^k$  tem-se  $t = 0$  e em  $\mathbf{x}^+$  tem-se  $t = 1$ . O valor de  $t$  que estabelece um ponto que fornece um decréscimo da função são os valores de  $t$  que definem pontos entre  $\mathbf{x}^k$  e  $\mathbf{x}^+$ . Objetiva-se um valor para  $t$  em que  $f(\mathbf{x}^k + t\mathbf{s}_k) < f(\mathbf{x}^k)$ .

### Algoritmo 2.2 (Busca Linear)

Dados  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in (0,1)$ ,  $\beta > 0$ ,  $\theta \in (0,1)$ .

Para um  $\mathbf{x}^k$  inicial, a nova aproximação  $\mathbf{x}^{k+1}$  é obtida da seguinte maneira (MARTINEZ ;SANTOS, 1995; GARNÉS, 2001) :

1. Se  $\nabla f(\mathbf{x}^k) = \mathbf{0}$ , parar.

Se  $\nabla f(\mathbf{x}^k) \neq \mathbf{0}$  executar o passo 2 até o passo 5

2. escolher  $\mathbf{s}_k \in \mathbb{R}^n$  de tal forma que

$$\nabla f(\mathbf{x}^k)^t \mathbf{s}_k \leq -\theta \|\nabla f(\mathbf{x}^k)\| \|\mathbf{s}_k\| \quad (2.46)$$

$$\|\mathbf{s}_k\| \geq \beta \|\nabla f(\mathbf{x}^k)\| \quad (2.47)$$

3. fazer  $t = 1$

4. (condição de Armijo)

$$\text{enquanto } f(\mathbf{x}^k + t\mathbf{s}_k) > f(\mathbf{x}^k) + \alpha t \nabla f(\mathbf{x}^k)^t \mathbf{s}_k \quad (2.48)$$

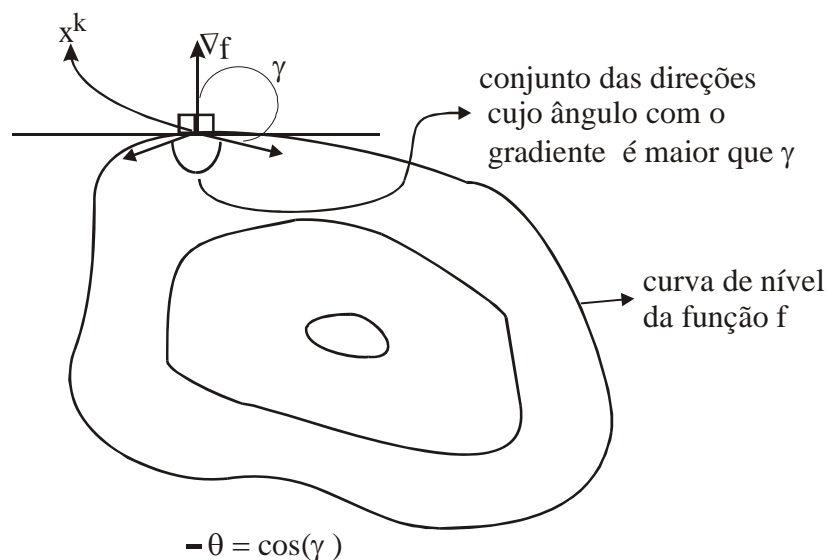
escolher um novo valor para  $t$  de forma que  $0,1\bar{t} \leq t \leq 0,9\bar{t}$ , com  $\bar{t}$  representando o valor para  $t$  fracassado.

5. fazer  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + t\mathbf{s}_k$  e voltar para o passo 1.

Segundo MARTINEZ e SANTOS (1995) impor somente que  $f(\mathbf{x}^k + t\mathbf{s}_k) < f(\mathbf{x}^k)$ , não garante que a sequência  $\{\mathbf{x}^k\}$  gerada pelo algoritmo convirja para um minimizador de  $f$ . Isto ocorre por que o decréscimo pode não ser suficiente, ou seja, há um decréscimo pequeno comparativamente ao comprimento do passo. A condição de Armijo (2.48) substitui o decréscimo simples por um decréscimo mais eficiente de  $f$ , quando este é necessário.

Outra situação a ser evitada é que os passos dados não sejam pequenos em relação ao decréscimo de  $f$ , evitando que o método caminhe, de forma aproximada, sobre a mesma curva de nível. As direções de descida  $\mathbf{s}_k$  poderiam ser escolhidas de maneira que, à medida que o processo iterativo evolui, o ângulo entre  $\mathbf{s}_k$  e o  $\nabla f(\mathbf{x}^k)$  tendesse a  $90^\circ$ .

FIGURA 2.3-CONDIÇÃO DO ÂNGULO



O cosseno do ângulo entre  $\mathbf{s}_k$  e o  $\nabla f(\mathbf{x}^k)$ , apesar de negativo, como exige uma direção de descida, tenderia a zero. A condição do ângulo impõe que o passo seja

dado em direção ao “interior” da curva de nível, como ilustrado na figura 2.3 acima. Nestas condições o ângulo entre o passo dado e o gradiente deve ser maior que  $90^\circ$  e menor que  $270^\circ$  (cosseno negativo).

Nota-se que  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^k) \mathbf{s}_k = -\nabla f(\mathbf{x}^k)$ , então aplicando a desigualdade de norma entre vetores,

$$\|\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)\| \|\mathbf{s}_k\| \geq \|\nabla f(\mathbf{x}^k)\| \quad (2.49)$$

e de forma equivalente

$$\|\mathbf{s}_k\| \geq \frac{1}{\|\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)\|} \|\nabla f(\mathbf{x}^k)\| \quad (2.50)$$

comparando a desigualdade (2.50) com (2.47) se verifica que

$$\beta = \frac{1}{\|\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)\|}. \quad (2.51)$$

A condição  $\beta$  inibe os passos muito curtos e impõe que o tamanho do passo seja ao menos maior que uma fração do gradiente, isto é,

$$\|\mathbf{s}_k\| \geq \beta \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|. \quad (2.52)$$

As direções  $\mathbf{s}_k$  que satisfazem a condição (2.52) são obtidos primeiramente pós-multiplicando a (2.52) por  $\mathbf{s}_k$

$$\|\mathbf{s}_k\| \|\mathbf{s}_k\| \geq \beta \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| \|\mathbf{s}_k\| \quad (2.53)$$

e posteriormente dividindo ambos os membros da (2.53) por  $\|\mathbf{s}_k\|$ , logo

$$\mathbf{s}_k \geq \beta \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|}{\|\mathbf{s}_k\|} \mathbf{s}_k. \quad (2.54)$$

Concluí-se que: para que a condição (2.47) seja cumprida o valor de  $\mathbf{s}_k$  deve satisfazer a desigualdade (2.54). Se  $\mathbf{s}_k$  não satisfaz a condição (2.52) é possível corrigí-lo para que isso aconteça. Um dos valores que permitem esta correção é obtida utilizando a igualdade dada na relação (2.54), ou seja,



$$\mathbf{s}_k = \beta \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|}{\|\mathbf{s}_k\|} \mathbf{s}_k. \quad (2.55)$$

Com estas considerações, se o valor para  $\mathbf{s}_k$  não cumpre a condição (2.46) toma-se um novo valor para  $\mathbf{s}_k$  como dado na relação (2.55).

Quando a condição dada na relação (2.48), conhecida como condição de Armijo, no passo 4 falhar adota-se  $t = 0,5\bar{t}$ , onde  $\bar{t}$  é o último valor fracassado. Uma implementação mais eficiente para obter o valor de  $t$ , pode ser feita utilizando modelos quadráticos e cúbicos. A descrição detalhada desta implementação pode ser encontrada em DENNIS JR. e SCHNABEL (1983, p. 126) e NOCEDAL e WRIGHT (1999, p. 56).

O parâmetro  $\alpha$  da condição de Armijo e o parâmetro  $\theta$  são adimensionais e recomendam-se valores adequados para estes parâmetros. Usualmente  $\alpha = 10^{-4}$  ou  $10^{-1}$  e  $\theta = 10^{-6}$  ( MARTINEZ; SANTOS,1995, p. 104).

#### 2.1.5.1.2 Método de região de confiança

O Método de busca linear e o método de região de confiança geram passos fazendo uso de um modelo quadrático local para uma função objetivo a qual é não linear. No entanto, estes métodos usam o modelo quadrático de forma diferente. Métodos que se baseiam em busca linear procuram usar o modelo quadrático para gerar uma direção, na qual o objetivo é obter um comprimento de passo  $t$  ao longo da direção de forma que haja um decréscimo satisfatório da função objetivo.

O método de região de confiança define uma região em torno do valor atual da iteração,  $\mathbf{x}^k$ , na qual se confia que o modelo é adequado à função objetivo, e então nesta região se obtém o passo que será o minimizador aproximado do modelo. Com efeito, este método escolhe a direção e o comprimento do passo simultaneamente. Se um passo não é aceito, reduz-se a região de confiança e encontra

um novo minimizador. Em geral, a direção do passo muda quando o tamanho da região de confiança é alterado.

Para obter cada passo, em um método da região de confiança, soluciona-se o subproblema:

$$\min \mathbf{M}_k(\mathbf{s}_k) = f(\mathbf{x}^k) + \nabla f(\mathbf{x}^k)^t \mathbf{s}_k + \frac{1}{2} \mathbf{s}_k^t \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) \mathbf{s}_k \quad (2.56)$$

$$\text{sujeito a } \|\mathbf{s}_k\| \leq \Delta_k.$$

O teorema a seguir, cuja prova é encontrada em NOCEDAL e WRIGHT (1999) fornece uma caracterização para a solução de (2.56).

*TEOREMA 2.1* O vetor  $\mathbf{s}_k$  é uma solução do problema da região de confiança

$$\min \mathbf{M}_k(\mathbf{s}_k) = f(\mathbf{x}^k) + \nabla f(\mathbf{x}^k)^t \mathbf{s}_k + \frac{1}{2} \mathbf{s}_k^t \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) \mathbf{s}_k$$

$$\text{sujeito a } \|\mathbf{s}_k\| \leq \Delta_k$$

se e somente se  $\mathbf{s}_k$  é factível e existe um escalar  $\lambda \geq 0$  tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\text{i) } (\nabla^2 f + \lambda \mathbf{I}) \mathbf{s}_k = -\nabla f \quad (2.57)$$

$$\text{ii) } \lambda(\Delta - \|\mathbf{s}_k\|) = 0 \quad (2.58)$$

$$\text{iii) } (\nabla^2 f + \lambda \mathbf{I}) \text{ é semi-definida positiva} \quad (2.59)$$

A condição (2.58) é conhecida como condição de complementaridade e afirma que ao menos uma das quantidades não-negativas,  $\lambda$  ou  $(\Delta - \|\mathbf{s}_k\|)$ , deve ser zero. Por isso, quando  $(\Delta - \|\mathbf{s}_k\|) > 0$  a solução de (2.56) fica estritamente no interior da região de confiança e deve-se ter  $\lambda = 0$  e neste caso tem-se  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^k) \mathbf{s}_k = -\nabla f(\mathbf{x}^k)$  que corresponde ao passo de Newton. No caso  $(\Delta - \|\mathbf{s}_k\|) = 0$ ,  $\lambda$  assume um valor positivo ou nulo.

O Teorema 2.1 caracteriza um algoritmo para encontrar uma solução  $\mathbf{s}_k$  para (2.56). Para tanto se observa que se  $\lambda = 0$  as condições (2.57) e (2.59) são satisfeitas com  $\|\mathbf{s}_k\| \leq \Delta$ , caso contrário define-se

$$\mathbf{s}_k(\lambda) = -(\nabla^2 f + \lambda \mathbf{I})^{-1} \nabla f \quad (2.60)$$

com  $\lambda$  suficientemente grande de forma que a matriz  $\nabla^2 f + \lambda \mathbf{I}$  seja definida positiva e procura-se um valor  $\lambda > 0$  tal que

$$\|\mathbf{s}_k\| = \Delta \quad (2.61)$$

A situação acima pode ser colocada como: deve existir um escalar  $\lambda_* > 0$  para o qual se obtém  $\mathbf{s}_k(\lambda_*) = -(\nabla^2 f + \lambda_* \mathbf{I})^{-1} \nabla f = \Delta$ , ver figura 2.4. Este problema é um problema unidimensional, que requer a obtenção de uma raiz na variável  $\lambda$  e está descrito no algoritmo seguinte.

### Algoritmo 2.3 (Região de Confiança Aproximado)

1. Escolher  $\lambda^{(0)} > 0$ ,  $\Delta > 0$  e  $\varepsilon = 10^{-2}$

Para  $\ell = 0, 1, 2, \dots$

2. obter os fatores da decomposição de Cholesky

$$\nabla^2 f + \lambda^\ell \mathbf{I} = \mathbf{R}^t \mathbf{R}$$

3. obtém-se  $\mathbf{q}_\ell$  e  $\mathbf{s}_{k\ell}$ , considerando  $(\mathbf{R}^t \mathbf{R}) \mathbf{s}_{k\ell} = -\nabla f$  através da seqüência

$$\mathbf{R}^t \mathbf{q}_\ell = -\nabla f \quad (\text{obtem-se o valor de } \mathbf{q}_\ell)$$

$$\mathbf{R} \mathbf{s}_{k\ell} = \mathbf{q}_\ell \quad (\text{obtem-se o valor de } \mathbf{s}_{k\ell})$$

4. Se  $\left| \|\mathbf{s}_{k\ell}\| - \Delta \right| < \varepsilon$  parar. Caso contrário ir para passo 5

5. fazer

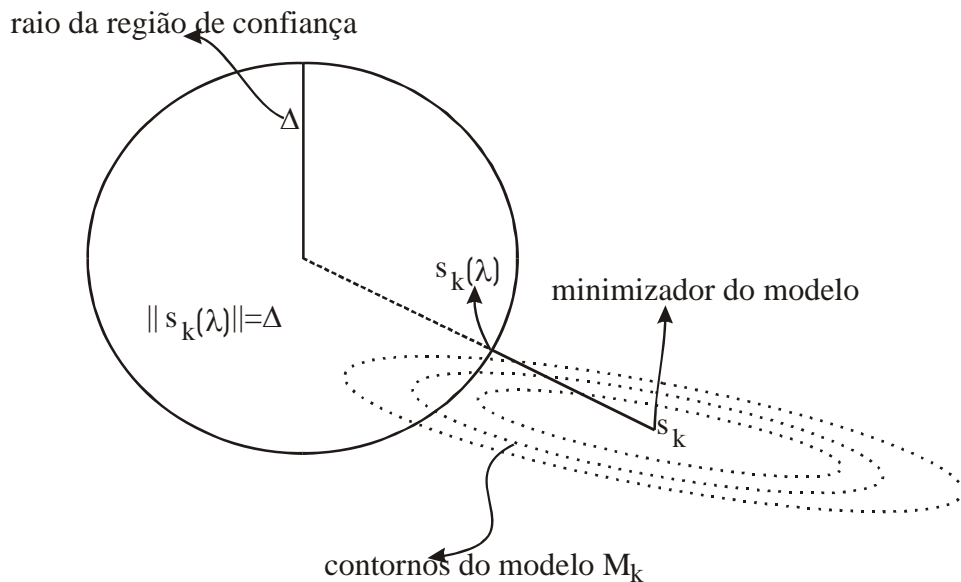
$$\lambda^{\ell+1} = \lambda^{\ell} + \left( \frac{\|\mathbf{s}_{k\ell}\|}{\|\mathbf{q}_{\ell}\|} \right)^2 \left( \frac{\|\mathbf{s}_{k\ell} - \Delta_k\|}{\Delta_k} \right)$$

e voltar ao passo 2.

No algoritmo 2.3 devem ser tomadas algumas salvaguardas, por exemplo, quando  $\lambda^{\ell} < \lambda_1$  ( $\lambda_1$  representa o menor valor próprio negativo da matriz hessiana  $\nabla^2 f$ ) nesta situação a decomposição de Cholesky não será obtida.

Outras formas de solucionar o problema (2.56) podem ser encontrados, por exemplo, em DENNIS JR e SCHNABEL (1983) e NOCEDAL e WRIGHT (1999). O valor de  $\varepsilon$  é escolhido como critério de parada para o subproblema colocado no passo 4, como sugestão  $\varepsilon = 10^{-2}$ .

FIGURA 2.4-REGIÃO DE CONFIANÇA APROXIMADO



De forma geral, descreve-se um algoritmo para solucionar o subproblema (2.56) considerando o algoritmo 2.3 como segue.

Se  $\nabla^2 f$  é definida positiva e  $\|\mathbf{s}_k\| \leq \Delta$  então  $\lambda = 0$  satisfaz (2.56) e não é necessário fazer nenhuma busca, ou seja, o algoritmo 2.3 não precisa ser usado. No caso em que  $\nabla^2 f$  é positiva definida, porém  $\|\mathbf{s}_k\| > \Delta$  existe um valor  $\lambda$  positivo no intervalo  $(0, \infty)$  e fazendo uso do algoritmo 2.3 busca-se uma solução para (2.61). No caso em que  $\nabla^2 f$  é indefinida, em geral, pode-se encontrar uma solução no intervalo  $(\lambda_1, \infty)$  se utilizando do algoritmo 2.3, onde  $\lambda_1$  representa o valor próprio mais negativo de  $\nabla^2 f$ .

Outra etapa do método de região de confiança está em escolher a região de confiança  $\Delta_k$  em cada iteração. A base para esta escolha está na conformidade entre o modelo  $\mathbf{M}_k$  e a função objetivo  $f$  nas iterações anteriores. Dado um passo  $\mathbf{s}_k$  define-se a razão,

$$\rho_k = \frac{f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k)}{\mathbf{M}_k(0) - \mathbf{M}_k(\mathbf{s}_k)} \quad (2.62)$$

na relação (2.62) tem-se  $\mathbf{M}_k(\mathbf{s}_k) = f(\mathbf{x}^k) + \nabla f(\mathbf{x}^k) \mathbf{s}_k + \frac{1}{2} \mathbf{s}_k^t \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) \mathbf{s}_k$ .

O numerador de (2.62) é chamado de redução atual e o denominador de redução predita. Observa-se que a redução predita será sempre positiva. Desta maneira se  $\rho_k$  é negativa significa que  $f(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k) > f(\mathbf{x}_k)$ , portanto o passo deve ser rejeitado.

Se  $\rho_k$  está próximo do valor 1, existe uma boa conformidade entre o modelo quadrático e a função objetivo neste passo. Então é razoável aumentar a região de confiança para a próxima iteração. Se  $\rho_k$  é positivo mas não está próximo de 1, não se altera a região de confiança a menos que  $\rho_k$  esteja próximo de zero ou negativo.

NOCEDAL e WRIGHT (1999) consideram  $\rho_k$  próximo de 1 quando  $\rho_k \geq \frac{3}{4}$ .

De forma geral tem-se (NOCEDAL; WRIGHT, 1999,p.68):

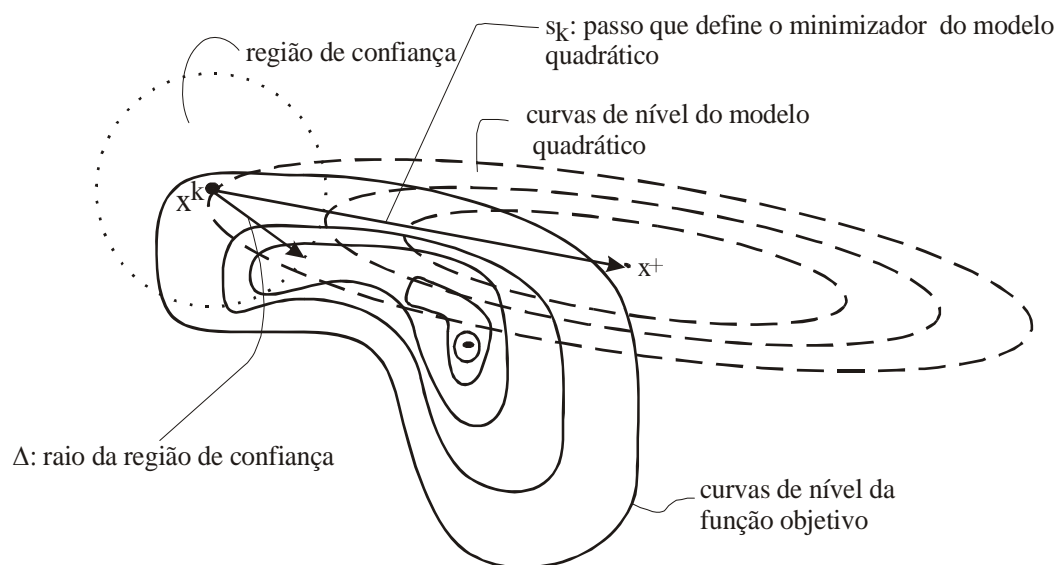
Se  $\rho_k \leq \frac{1}{4}$  o modelo é considerado “ruim”

Se  $\frac{1}{4} < \rho_k < \frac{3}{4}$  modelo é considerado razoável

Se  $\rho_k \geq \frac{3}{4}$  o modelo é considerado bom.

A figura 2.5 mostra o comportamento de um passo do processo iterativo quando se usa método de região de confiança e o passo de Newton.

FIGURA 2.5 – COMPARATIVO: REGIÃO DE CONFIANÇA E O PASSO DE NEWTON



#### 2.1.5.2 Método LP para um problema de valor próprio inverso

Uma outra possibilidade para solucionar um problema de valor próprio inverso é a aplicação de métodos que não utilizem as derivadas primeiras e nem tão pouco das derivadas segundas, sem perder as características de globalização requerida.

Uma forma alternativa para trabalhar com um problema de valor próprio inverso no sentido de mínimos quadrados e que traz excelentes resultados na aplicação em otimização dos pesos é descrita a seguir.

Seja  $\mathbf{O}(n)$  um conjunto representando todas as matrizes ortogonais no espaço  $\mathbf{R}^{n \times n}$ , e também  $\mathbf{D}^{n-m}$  representando todas as matrizes diagonais de dimensão  $(n-m) \times (n-m)$ . Para um dado conjunto

$$\Lambda_m^* = \text{diag}\{\lambda_1^* \quad \dots \quad \lambda_m^*\} \quad (2.63)$$

considera-se o subconjunto

$$\mathbf{T} = \left\{ \mathbf{Q} \text{diag}(\Lambda_m^*, \Lambda_{n-m}) \mathbf{Q}^t \mid \mathbf{Q} \in \mathbf{O}(n), \Lambda_{n-m} \in \mathbf{D}^{n-m} \right\} \quad (2.64)$$

e também o conjunto

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{A}(\mathbf{c}) \mid \mathbf{c} \in \mathbf{R}^\ell \right\}. \quad (2.65)$$

onde  $\mathbf{A}(\mathbf{c})$  é definida como na expressão (2.31).

Observa-se, que  $\text{diag}(\Lambda_m^*, \Lambda_{n-m})$  é de dimensão  $n \times n$  e o conjunto  $\mathbf{T}$  representa todas as matrizes simétricas no espaço  $\mathbf{R}^{n \times n}$ , que possui os valores próprios pré-definidos  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$  como parte do seu espectro.

Para fixar idéia, sobre os elementos do conjunto  $\mathbf{T}$ , consideram-se dois exemplos apresentados a seguir.

### Exemplo 2.2

Dados  $n = 5$  e  $m = 3$  e o conjunto de valores próprios pré-definidos como,  $\{20 \ 15 \ 10\}$  o qual define a matriz  $\Lambda_3^* = \text{diag}\{20 \ 15 \ 10\}$ . Fica caracterizado um elemento do conjunto  $\mathbf{T}$ , aqui representado por  $\mathbf{T}_3$ , se  $\mathbf{T}_3 \in \mathbf{T} = \left\{ \mathbf{Q} \text{diag}(\Lambda_3^*, \Lambda_{5-3}) \mathbf{Q}^t \mid \mathbf{Q} \in \mathbf{O}(5), \Lambda_2 \in \mathbf{D}^2 \right\}$ .

Uma escolha simples para matriz ortogonal  $\mathbf{Q} \in \mathbf{O}(5)$ , é a matriz identidade de dimensão 5 e uma matriz  $\Lambda_2 \in \mathbf{D}^2$  como  $\Lambda_2 = \text{diag}\{4 \ 3\}$ . Considerando a matriz  $\Lambda_3^* = \text{diag}\{20 \ 15 \ 10\}$  construída em função dos valores próprios pré-definidos, se obtém um elemento (matriz), representado por  $\mathbf{T}_3$ , que pertence ao conjunto  $\mathbf{T}$ ,

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Lambda_3^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t, \text{ que resulta em}$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t, \text{ logo}$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ a qual apresenta as características estabelecidas pelo}$$

conjunto  $\mathbf{T}$ .

Fazendo-se outras escolhas para a matriz ortogonal  $\mathbf{Q} \in \mathbf{O}(5)$  e também para matriz  $\Lambda_2 \in \mathbf{D}^2$  consegue-se construir outras matrizes com  $\{20 \ 15 \ 10\}$  como parte de seu conjunto espectral.

### Exemplo 2.3

Um caso particular, e não menos importante, é o caso em que  $m = n$ . Neste caso o espectro inteiro dos elementos de  $\mathbf{T}$  são pré-definidos ou pré-requeridos. Para



exemplificar esta situação considera-se  $n = 2$  e  $\Lambda_2^* = \text{diag}\{7 \ 4\}$  que define o conjunto  $\mathbf{T}$  como  $\mathbf{T} = \{\mathbf{Q}\text{diag}(\Lambda_2^*)\mathbf{Q}^t \mid \mathbf{Q} \in \mathbf{O}(2)\}$ . Escolhendo a matriz ortogonal  $\mathbf{Q}$

como  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0,995133327 & 0,098537618 \\ 0,098537618 & 0,995133327 \end{bmatrix}$  um elemento  $\mathbf{T}_2 \in \mathbf{T}$  será obtido por,

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} -0,995133327 & 0,098537618 \\ 0,098537618 & 0,995133327 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,995133327 & 0,098537618 \\ 0,098537618 & 0,995133327 \end{bmatrix}^t$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 6,97087100425521 & -0,29417420260937 \\ -0,29417420260937 & 4,02912898119109 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{T}_2$  como estabelecido acima apresenta as características pré-definidas.

Considerando a dimensão dos elementos dos conjuntos  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{A}$  iguais, encontrar a menor distância entre estes conjuntos é uma forma alternativa para solucionar um problema de valor próprio inverso. A formulação para este problema é dada a seguir,

Formulação I. Encontrar  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^\ell$ ,  $\mathbf{Q} \in \mathbf{O}(n)$  e  $\Lambda_{n-m} \in \mathbf{D}^{n-m}$  de tal forma que a função

$$G(\mathbf{c}, \mathbf{Q}, \Lambda_{n-m}) = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{A}(\mathbf{c}) - \mathbf{Q}\text{diag}(\Lambda_m^* \ \Lambda_{n-m})\mathbf{Q}^t \right\|_F^2 \quad (2.66)$$

seja minimizada. Na relação (2.66)  $\|\bullet\|_F$  representa a norma de Frobenius.

Ao problema (2.32) está associado um problema combinatório, representado por

$$\min_{1 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_m \leq n} \sum_{i=1}^m \left( \lambda_{\sigma_i}(\mathbf{c}) - \lambda_i^* \right)^2 \quad (2.67)$$

A representação (2.67) indica que os valores próprios pré-definidos e os valores próprios da matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{c})$  devem estar na mesma ordem de grandeza. No caso em que  $m = n$ , isto é, quando o espectro inteiro de  $\mathbf{A}$  é pré-definido, não é necessário

resolver (2.67) visto que a permutação procurada é simplesmente a permutação que arranja os valores próprios  $\lambda_i(\mathbf{c})$  na mesma ordem de  $\lambda_i^*$ .

### 2.1.6 Minimização com restrições

Problemas sobre o enfoque da minimização com restrições originam-se a partir da modelagem de problemas que necessitam restrição explícita sobre suas variáveis. As restrições podem ser lineares ou não-lineares, que neste, caso apresentam uma complexidade maior de relação entre as variáveis do problema.

Quando ambas, a função objetivo e as restrições, são funções lineares da variável, o problema é de programação linear. Quando algumas das restrições ou a função objetivo é não-linear o problema é de programação não-linear.

A formulação geral para este problema é,

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}} f(\mathbf{x}) \text{ sujeito a } \begin{cases} c_i(\mathbf{x}) = 0, & i \in \xi \\ c_i(\mathbf{x}) \leq 0, & i \in I \end{cases} \quad (2.68)$$

com  $\xi = \{1, 2, \dots, p\}$  e  $I = \{1, 2, \dots, m\}$

onde  $f$  e  $c_i$  são funções na variável  $\mathbf{x}$  e  $\xi$  e  $I$  são dois conjuntos finitos de índices representando respectivamente o número de restrições de igualdade e de desigualdade. Define-se o conjunto factível  $\Omega$  como o conjunto de pontos  $\mathbf{x}$  que satisfazem as restrições, que é

$$\Omega = \{\mathbf{x} | c_i(\mathbf{x}) = 0, i \in \xi; c_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in I\}$$

portanto pode-se escrever o problema (2.68) de forma compacta como

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x})$$

Uma classe importante de métodos para otimização com restrições que procura a solução do problema trocando o problema restrito por uma seqüência de problemas irrestritos pode ser encontrado, por exemplo, nos trabalhos de GARNÉS (2001), NOCEDAL e WRIGHT (1999) e MARTINEZ e SANTOS (1995).

Neste trabalho utiliza-se o método de Lagrangeano Aumentado. Em geral, os métodos de Lagrangeano Aumentado são usados para resolver problemas de programação não-linear com restrições.

#### 2.1.6.1 Lagrangeano Aumentado

Os problemas com restrições a serem aplicados são do tipo com restrições de desigualdade, ou seja, um caso particular do problema (2.68) escrito da seguinte forma,

$$\begin{aligned} &\min f(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeito a } c_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in I \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

onde  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é a função objetivo,  $c_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  para  $I = \{1, 2, \dots, m\}$  são as restrições.

A metodologia dos métodos de Lagrangeano Aumentado consiste em resolver o problema com restrições através de uma seqüência de subproblemas irrestritos. Os procedimentos são iterativos e cada iteração consiste em resolver um subproblema por qualquer método de minimização irrestrita que se adapte ao problema e a atualiza-se os parâmetros (multiplicadores de Lagrange e o parâmetro de penalização). Os subproblemas irrestritos resolvidos geram uma seqüência, cujo nome é primal. Uma outra seqüência gerada pelo método é a de multiplicadores, a qual é uma seqüência dual. Assim, são geradas duas seqüências:  $\mathbf{x}^k$  a primal e  $\mu^k$  a dual (JUSSIANI, 2004, p. 2). A seqüência primal não é necessariamente viável ( não satisfaz  $c(\mathbf{x}^k) \leq 0$ ) mas é esperado que vá se tornando viável à medida que  $k$  cresce ( a medida que as iterações ocorram). Já a seqüência dual é sempre viável, no sentido da viabilidade dual,  $\mu^k \geq 0$ , para todo  $k \geq 0$  (MATIOLI, 2001, p.1).

Considere-se o problema como estabelecido em (2.69),

*Problema P*

$$\begin{aligned} & \min f(\mathbf{x}) \\ & \text{sujeito a } c_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in I \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

onde  $f$  e  $c_i$  para  $I = \{1, 2, \dots, m\}$  são contínuas e possuem derivadas, ao menos até primeira ordem, contínuas.

A função Lagrangeano Aumentado para o problema (2.70) pode ser escrita da seguinte forma (JUSSIANI, 2004, p. 30; MATIOLI, 2001, p. 29)

$$(\mathbf{x}, \mu, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow L(\mathbf{x}, \mu, r) = f(\mathbf{x}) + r \sum p\left(\frac{c_i(\mathbf{x})}{r}, \mu_i\right)$$

sendo  $r$  o parâmetro de penalização e  $p$  uma função de penalidade da família  $P$ .

As condições de Karush-Kuhn-Tucker (K.K.T) para o problema  $P$ , ou sejam, as condições necessárias de primeira ordem para um ponto  $\mathbf{x}^*$  ser um ponto extremo do problema  $P$ , são as seguintes:

O gradiente das restrições ativas em  $\mathbf{x}^*$  são linearmente independentes e ainda

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* \nabla c_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (\text{otimalidade})$$

$$\mu_i^* c_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (\text{complementaridade})$$

$$c_i(\mathbf{x}^*) \leq 0 \quad (\text{restrições})$$

$$\mu_i^* \geq 0 \quad (\text{multiplicador de Lagrange}).$$

#### 2.1.6.1.1 Função de penalidade coerciva pela direita

Define-se uma família de funções de penalidades que são coercivas à direita,

$$y \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}_{++} \rightarrow p(y, \mu) \in \mathbb{R} \quad (2.71)$$

com domínio  $D = (-\infty, b)$ ,  $b > 0$  e  $\mu \in \mathbb{R}_{++}$ , como a função que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(P1) \quad p(0, \mu) = 0;$$

$$(P2) \quad p'(0, \mu) = \mu;$$

$$(P3) \quad p(\cdot, \mu) \text{ é estritamente convexa e diferenciável em } (-\infty, b);$$

$$(P4) \quad \lim_{y \rightarrow b} p'(y, \mu) = +\infty;$$

$$(P5) \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} p'(y, \mu) = 0.$$

Usa-se  $p'(y, \mu)$  para representar a derivada da função  $p$  em relação à variável  $y$ .

As famílias de funções representadas em (2.71) serão posteriormente usadas para melhor definir o algoritmo de Lagrangeano Aumentado.

#### 2.1.6.1.2 Penalidades da família P

As metodologias para construir funções de penalidades da família P, como estabelecido em (2.71), geralmente usam uma função auxiliar de uma variável real.

Deste forma, define-se  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função satisfazendo as seguintes propriedades:

$$i) \quad \text{domínio de } \theta = (-\infty, b), \quad b > 0 \text{ possivelmente } b = +\infty;$$

$$ii) \quad \theta(0) = 0 \text{ e } \theta'(0) = 1;$$

$$iii) \quad \theta \text{ é estritamente convexa e diferenciável em } (-\infty, b);$$

$$iv) \quad \lim_{y \rightarrow b} \theta'(y) = +\infty; \quad (\text{coercividade pela direita})$$

$$v) \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \theta'(y) = 0.$$

A função  $\theta(y) = e^y - 1$  satisfaz todas as propriedades citadas acima e é um caso em que  $b = +\infty$ , isto é, domínio de  $\theta = (-\infty, +\infty)$ .

Dois tipos de penalidades da família P podem ser usadas, denominadas de penalidades do **tipo 1** e **tipo 2**.

**TIPO 1** Considere-se  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as propriedades (i) a (v) da definição anterior. Então a penalidade p é dada por

$$p(y, \mu) = \theta(\mu y) \in \mathbb{R}$$

com  $y \in \mathbb{R}$  e  $\mu \in \mathbb{R}_{++}$  é uma penalidade da família P.

Exemplo 2.4

Dada  $\theta(y) = e^y - 1$ , a penalidade do tipo 1 obtida a partir de  $\theta$  fica

$$p(y, \mu) = e^{\mu y} - 1.$$

**TIPO 2** Considere-se  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as propriedades (i) a (v) da definição anterior. Então a penalidade p é dada por

$$p(y, \mu) = \mu \theta(y) \in \mathbb{R}$$

com  $y \in \mathbb{R}$  e  $\mu \in \mathbb{R}_{++}$  é uma penalidade da família P.

Exemplo 2.5

Dada  $\theta(y) = e^y - 1$ , a penalidade do tipo 2 obtida a partir de  $\theta$  fica

$$p(y, \mu) = \mu(e^y - 1).$$

A diferença entre as penalidades do **tipo 1** e do **tipo 2** está na posição que o parâmetro  $\mu \in \mathbb{R}_{++}$  (multiplicador de Lagrange) ocupa. Na penalidade tipo 1,  $\mu$  multiplica o argumento da função  $\theta$ , e na penalidade tipo 2,  $\mu$  multiplica a função  $\theta$ .

O algoritmo de Lagrangeano Aumentado aplicado a problema P é iterativo e começa com  $\mu^0 \in \mathbf{R}_+^m$ ,  $r^0 \in \mathbf{R}_{++}$  gerando seqüências  $\mathbf{x}^k$  e  $\mu^k$  é escrito da seguinte forma (JUSSIANI, 2004, p. 31; MATIOLI, 2001, p. 30):

**Algoritmo 2.4 (Algoritmo de Lagrangeano Aumentado)**

Dados  $\mu^0 \geq 0$  e  $r^0 > 0$

fazer  $k = 0$

repetir

encontrar

$$\mathbf{x}^{k+1} \text{ minimizador de } \left\{ f(\mathbf{x}) + r^k \sum_{i=1}^m p\left(\frac{c_i(\mathbf{x})}{r^k}, \mu_i^k\right), \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \right\}$$

atualizar

$$\mu_i^{k+1} = p'\left(\frac{c_i(\mathbf{x}^{k+1})}{r^k}, \mu_i^k\right) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

fazer

$k = k + 1$

Em cada iteração do método deve-se minimizar a função Lagrangeano Aumentado que pode ser resolvida por qualquer método de minimização irrestrita. Como exemplo, o método de Newton com busca linear e o método de região de confiança citados anteriormente e posteriormente atualizar os parâmetros. Os métodos de Lagrangeano Aumentado têm por objetivo conciliar dois aspectos: contornar os aspectos de mau condicionamento e evitar perda na estrutura de minimização (MARTINEZ e SANTOS, 1995, p. 189).

### 2.1.7 Critérios de Confiabilidade

A teoria da confiabilidade avalia se um determinado erro grosseiro numa observação é detectável. Avalia também a influência deste erro no ajustamento quando não detectado. Portanto, ela é parte integrante do conceito de avaliação da qualidade de um ajustamento. Observações que apresentam erros grosseiros são entendidas como observações inconsistentes perante o resto dos dados. A detecção dos erros grosseiros é obtida através da aplicação do teste global e a sua localização através do teste *data snopping* de Baarda (KAVOURAS, 1982, p.39). Mesmo no caso em que estes erros não foram detectados nas observações pode-se estimar a máxima alteração que estes causam na determinação dos parâmetros. Estas técnicas de detectar, localizar e avaliar a influência dos erros grosseiros nos parâmetros, recebem o nome de confiabilidade, a qual se subdivide em: confiabilidade interna e confiabilidade externa. A confiabilidade interna quantifica a menor porção do erro existente em uma observação e a confiabilidade externa quantifica a influência do erro não detectável nos parâmetros estimados.

### 2.1.8 Detecção de Erros Grosseiros

O primeiro teste que é aplicado para a detecção de erros grosseiros após o ajustamento, é o teste global sobre o fator de variância a posteriori  $\hat{\sigma}_0^2$ . Este teste somente pode ser aplicado se existir um conhecimento a priori sobre a precisão das observações, isto é, quando o fator de variância a priori  $\sigma_0^2$  é conhecido (KAVOURAS, 1982, p.31 ). Assim a detecção de erros grosseiros após o ajustamento faz-se mediante a aplicação do teste qui-quadrado,

$$\chi^{*2} = \frac{\mathbf{V}^t \mathbf{P} \mathbf{V}}{\sigma_0^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \mathbf{r}, \quad (2.72)$$



com  $r = n - u$ ,  $n$  é o número de observações,  $u$  número de parâmetros e  $\mathbf{P} = \sigma_0^2 \Sigma_{\ell_b}^{-1}$ , sendo  $\hat{\sigma}_0^2$  estimado através da expressão (ver expressão 2.30),

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{V}^t \mathbf{P} \mathbf{V}}{r} \quad (2.73)$$

que por sua vez, segue a distribuição  $\chi_r^2$  (Qui quadrado) com  $r$  graus de liberdade na formulação da seguinte hipótese:

Se a hipótese básica ou nula  $H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$  for testada contra a hipótese alternativa  $H_a : \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$ ; o teste bilateral é recomendado (SARTORIS, 2003, p.200; KUANG, 1996, p.71). Fixando-se um determinado nível de significância  $\alpha$ , a hipótese  $H_0$  não é rejeitada se a estatística calculada se situar no intervalo  $\chi_{r;0,5\alpha}^2 < \chi^{*2} < \chi_{r;1-0,5\alpha}^2$ .

Se os modelos matemáticos estão bem definidos (baseados em modelos geométricos ou físicos) e também as propriedades estocásticas das observações bem conhecidas (pesos estimados corretamente) então pode-se atribuir aos erros grosseiros a falha do teste global sobre o fator de variância a posteriori  $\hat{\sigma}_0^2$  (KUANG, 1996, p.122).

Quando o teste global é utilizado para detectar erros grosseiros normalmente é esperado que  $\hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$ . Isso por que a suposição fundamental é que as observações contaminadas por erros grosseiros resultam em resíduos padronizados de magnitudes significativamente altas (KAVOURAS, 1982, p. 32).

#### 2.1.8.1 Erros: Tipo I e Tipo II

A decisão de não rejeitar ou rejeitar a hipótese testada depende do nível de significância adotado.

Se o valor experimental da variável de teste cair na região de aceitação da hipótese testada não há, no nível de significância  $\alpha$  considerado, evidência significativa para rejeitar a hipótese  $H_0$  e esta deve ser aceita. Nota-se que pode haver um erro nesta decisão, pois se pode estar aceitando uma hipótese como verdadeira e na realidade esta é falsa (evidentemente o examinador não sabe deste fato). Este erro é denominado erro tipo II e é designado por  $\beta$ . Neste caso a não rejeição da hipótese básica  $H_0$  será acompanhada de uma avaliação probabilística ( $\beta$ ) da possibilidade de que esta hipótese de fato deveria ser rejeitada.

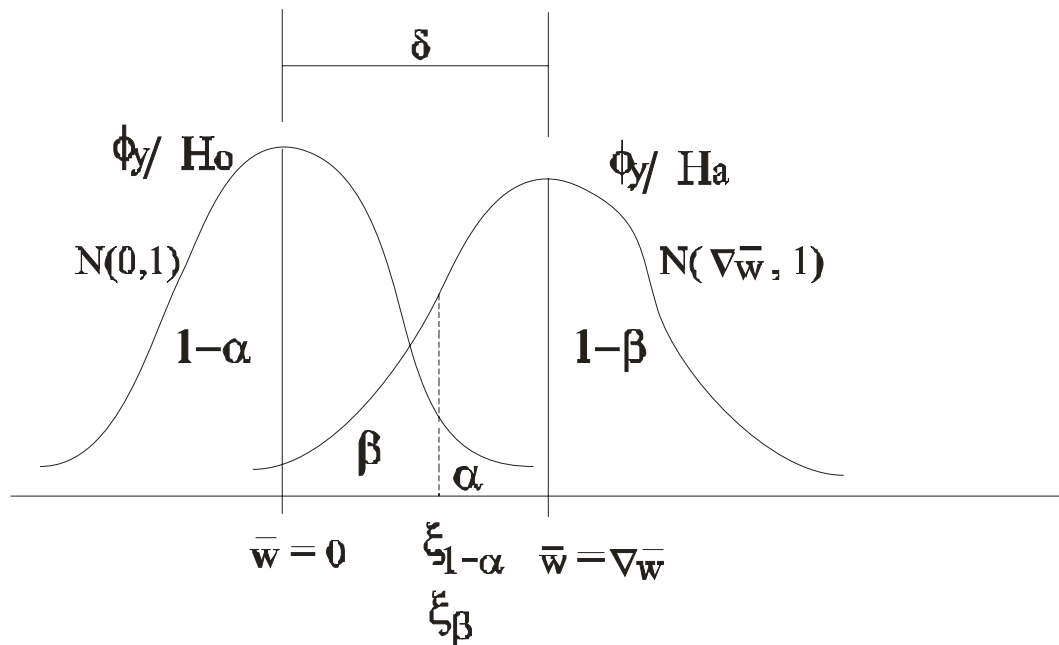
De forma contrária, no caso em que  $H_0$  é rejeitada esta decisão também será acompanhada de uma avaliação probabilística sobre fato que esta hipótese não deveria ser rejeitada (evidentemente o examinador não sabe se de fato isto ocorre), este erro é denominado erro tipo I e designado por  $\alpha$ , sendo a própria significância do teste. Portanto um teste de hipótese não determina o valor verdadeiro de uma grandeza apenas fornece um meio para decidir se há possibilidade de agir como se o valor testado fosse o valor verdadeiro da grandeza.

Como exposto anteriormente em um teste de hipóteses podem ocorrer dois tipos de erros dependendo de não rejeitar ou rejeitar a hipótese nula e do não conhecimento do valor verdadeiro a ser testado.

O erro tipo I ocorre quando se rejeita a hipótese nula  $H_0$  quando ela deveria ser aceita. A avaliação probabilística de se estar cometendo este erro é denominada nível de significância denotado por  $\alpha$ , e quando não rejeita-se a hipótese nula a probabilidade de se estar fazendo a decisão correta é chamada nível de confiança denotada por  $1 - \alpha$ .

O erro tipo II ocorre quando não se rejeita a hipótese nula quando ela deveria ser rejeitada ( $H_a$  é em realidade verdadeira) e a probabilidade de cometer este tipo de erro é denotado por  $\beta$ . A probabilidade de rejeitar a hipótese nula  $H_0$  quando ela é realmente falsa é denominado o poder do teste e sua avaliação probabilística é  $1 - \beta$ .

FIGURA 2.6- ERRO TIPO I E ERRO TIPO II



Na figura 2.6 observa-se que se uma estatística  $y$  é testada a função de densidade de probabilidade de  $y$  sobre a hipótese nula  $H_0$  é representada por  $\phi_y / H_0$  (como exemplo particular desta distribuição tem-se a distribuição normal com média zero e variância um) e a função densidade de probabilidade desta estatística sobre a hipótese alternativa  $H_a$  é representada por  $\phi_y / H_a$ . Sobre a hipótese nula e a hipótese alternativa, a função de densidade de probabilidade de uma determinada estatística tem a mesma forma apresentando valores diferentes para seus parâmetros populacionais, média e variância. Assim sendo o poder do teste indica a menor diferença  $\delta$  entre as médias  $\bar{w} = 0$  e  $\bar{w} = \nabla \bar{w}$ , com distribuições de probabilidade  $\phi_y / H_0$  e  $\phi_y / H_a$  respectivamente, que pode ser detectado se o teste é executado no nível de significância  $\alpha$ .

A avaliação probabilística da decisão de não rejeitar ou rejeitar a hipótese básica é:

1) Decisão de não rejeitar a hipótese nula  $H_0$  :

a decisão de não rejeitar a hipótese nula  $H_0$  é acompanhada de uma probabilidade de  $100\beta\%$  dos casos de não estar correta no nível de confiança de  $1 - \alpha$ .

2) Decisão de rejeitar a hipótese nula  $H_0$  :

a decisão de rejeitar  $H_0$  é acompanhada de uma probabilidade de  $100(1-\beta)\%$  dos casos de estar correta no nível de significância  $\alpha$ .

Pelo exposto acima se observa que a não rejeição da hipótese básica  $H_0$  não deve ser entendida como uma afirmação da hipótese  $H_0$ , assim como a rejeição de  $H_0$  não deve ser entendida como a afirmação da hipótese alternativa  $H_a$ .

Como a significância do teste é previamente estabelecida, um teste de hipóteses será tão melhor quanto menor for a probabilidade se estar cometendo o erro do tipo II, ou seja, se estar aceitando uma hipótese que deve em realidade ser rejeitada.

Observa-se que o erro do tipo I somente é cometido quando se rejeita  $H_0$ , e o erro do tipo II é cometido somente quando  $H_0$  é aceita (COSTA NETO, 1995, p.86).

#### 2.1.8.2 Redundância parcial

As redundâncias parciais  $r_i$ , grandezas adimensionais, são os elementos da diagonal principal da matriz originada do produto das matrizes dos resíduos  $\mathbf{Q}_v$  e dos pesos  $\mathbf{P}$ , onde

$$\mathbf{Q}_v = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \mathbf{\Sigma}_v \quad (2.74)$$

sendo,  $\mathbf{\Sigma}_v$  a matriz das covariâncias dos resíduos dada por (GEMAEL, 1994, p.121; DALMOLIN, 2002, p. 100):

$$\mathbf{\Sigma}_v = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{Q}_{\hat{\ell}}) \quad (2.75)$$

e  $\mathbf{Q}_{\hat{\ell}} = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \mathbf{\Sigma}_{\ell a} = \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^t$  é a matriz das covariâncias dos valores observados ajustados.

A equação (2.74) pode ser escrita como:

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^t \quad (2.76)$$

Multiplicando à direita, ambos os membros de (2.76), pela matriz dos pesos obtém-se

$$\mathbf{Q}_v \mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^t \mathbf{P}. \quad (2.77)$$

Considerando que  $r_i$  representa cada elemento da diagonal principal da matriz  $\mathbf{Q}_v \mathbf{P}$ , escreve-se,

$$r_i = (\mathbf{Q}_v \mathbf{P})_{ii} = q_{v_i} \times p_i \quad (2.78)$$

ou de forma equivalente, se expressa a equação (2.78) através do  $i$ -ésimo elemento da diagonal principal de (2.77) e obtém-se a redundância, para cada quantidade observada.

O valor dos elementos de  $\mathbf{Q}_x$  na equação (2.29), são afetados pelas propriedades estocásticas de todas as observações representadas pela matriz  $\mathbf{P}$  e pela matriz planeamento  $\mathbf{A}$  que contém informações sobre a geometria da rede. Similarmente, o número de redundância parcial de uma observação, denotado por  $r_i$ , (com  $i = 1, 2, \dots, n$  observações), é dependente de todas as outras observações como pode ser notado na equação (2.79) proveniente da equação (2.78) e equivalente a equação (2.77),

$$r_i = 1 - \mathbf{p}_i \mathbf{q}_{\hat{\ell}_i} \quad (2.79)$$

onde

$$\mathbf{q}_{\hat{\ell}_i} = \mathbf{a}_i (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_i^t \quad (2.80)$$

é o i-ésimo elemento da diagonal principal da matriz  $\mathbf{Q}_{\hat{\ell}}$  e ainda "t" indica a transposição da i-ésima linha,  $\mathbf{a}_i$ , da matriz planejamento  $\mathbf{A}$ , e  $\mathbf{p}_i$ , o i-ésimo elemento da diagonal da matriz dos pesos representada por  $\mathbf{P}$ .

Observa-se que, como no caso da matriz de covariâncias se a geometria da rede é fixada a redundância parcial é dependente somente da matriz dos pesos, fato este que possibilita tratar a redundância como função objetivo (ou complementar) em um processo de otimização dos pesos de uma rede geodésica.

Os valores das redundâncias parciais  $r_i$ , permitem a controlabilidade das observações referente a erros grosseiros. Estes valores situam-se no intervalo  $[0, 1]$ , isto é,  $0 \leq r_i \leq 1$ . O quadro 1 mostra os intervalos recomendados para a decisão sobre a controlabilidade de observações mediante as redundâncias parciais.

QUADRO 2.1 – INTERVALO PARA A CONTROLABILIDADE DAS OBSERVAÇÕES

$0 \leq r_i < 0,01$	Não há
$0,01 \leq r_i < 0,1$	Ruim
$0,1 \leq r_i < 0,3$	Suficiente
$0,3 \leq r_i \leq 1$	Boa

FONTE: MÜRLE e BILL (1984)

Lembra-se que a redundância total  $r$  (número de graus de liberdade) é dada pela expressão:

$$\text{tr}(\mathbf{Q}_v \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^n r_i = r = n - u \quad (2.81)$$

com  $\text{tr}$  sendo o traço da matriz,  $n$  número de observações e  $u$  o número de parâmetros estimados na rede.

### 2.1.8.3 Relação entre resíduo e erros grosseiros

Segundo Kavouras (1982) o resíduo  $\mathbf{v}$  de cada observação é composto de duas parcelas, uma parcela é a contribuição dos erros aleatórios e a outra é a contribuição dos erros grosseiros  $\nabla l$  desta forma,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \nabla_v \quad (2.82)$$

onde:

$\mathbf{v}_r = \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \varepsilon_r$  é a influência dos erros aleatórios e  $\nabla_v = \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \nabla l$  é a influência dos erros grosseiros sobre os resíduos.

A fim de examinar a influência no resíduo causado por um erro grosseiro  $\nabla l_i$  cometido na observação  $\ell_i$  considera-se uma observação de cada vez. Com a equação (2.82), a relação (2.78) e  $\nabla_v = \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \nabla l$  esta influência é expressa por,

$$\nabla_{v_i} = (\mathbf{Q}_v \mathbf{P})_{ii} \nabla l_i \quad (2.83)$$

ou então

$$\nabla_{v_i} = r_i \nabla l_i \quad (2.84)$$

com  $r_i$  sendo a redundância parcial da observação e  $\nabla l_i$  o erro grosseiro cometido na  $i$ -ésima observação.

Da equação (2.84) e tendo que  $0 \leq r_i \leq 1$  observa-se que  $r_i$  expressa a proporção que um erro grosseiro influencia no resíduo da observação.

Observando a relação (2.84) e considerando o quadro 2.1 interpreta-se o relacionamento entre a redundância parcial e o erro grosseiro cometido em cada observação.

Considerando que  $r_i$  representa a proporção do erro grosseiro que afeta o resíduo então a grandeza,

$$u_i = 1 - r_i \quad (2.85)$$

é a quantidade complementar da redundância parcial denominada número de absorção e expressa a proporção do erro grosseiro que não afeta o resíduo.

Se um erro grosseiro  $\nabla l_i$  foi cometido em uma observação  $\ell_i$ , então multiplicando (2.85) por  $\nabla l_i$  tem-se,

$$\nabla l_i u_i = \nabla l_i - \nabla l_i r_i \quad (2.86)$$

com isso

$$\nabla l_i = r_i \nabla l_i + (1 - r_i) \nabla l_i. \quad (2.87)$$

Pela relação (2.87) um erro grosseiro  $\nabla l_i$  é formado por duas parcelas sendo que a primeira parcela é a que afeta a magnitude do resíduo, comparar a relação (2.84) com a (2.87), e a segunda parcela não afeta a magnitude do resíduo. Em analogia pode-se dizer que a primeira parcela  $r_i \nabla l_i$  é a parte visível e a segunda parcela  $(1 - r_i) \nabla l_i$  é a parte não visível do erro grosseiro.

Do exposto acima se concluí que caso um erro grosseiro seja cometido em uma observação, após um ajustamento pelo método dos mínimos quadrados parte deste erro influenciará o resíduo e em consequência este erro também influenciará na magnitude dos parâmetros.

### Exemplo 2.6

1) Se  $r_i = 1$ , pela equação (2.82) considerando a (2.84) tem-se:

$v_i = v_{r_i} + r_i \nabla l_i$ , mas  $r_i = 1$  com isso  $v_i = v_{r_i} + \nabla l_i$  com isso 100% do erro grosseiro  $\nabla l_i$  influenciará a magnitude do resíduo da observação.

2) Se  $r_i = 0,5$ ,

$v_i = v_{r_i} + r_i \nabla l_i$ , com  $r_i = 0,5$  obtém-se  $v_i = v_{r_i} + \frac{\nabla l_i}{2}$  com isso 50% ou a metade do erro grosseiro está refletido no resíduo.

3) Se  $r_i = 0$ ,



$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{r_i} + r_i \nabla l_i$ , com  $r_i = 0$ , obtém-se  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{r_i}$ , ou seja, 0% do erro grosseiro está refletido no resíduo, assim teoricamente o resíduo está “contaminado” somente por erros aleatórios.

Os exemplos acima mostram que se um erro grosseiro ocorre em uma observação que apresenta uma “grande” redundância parcial este erro afetará mais o correspondente resíduo  $\mathbf{v}_i$  e será melhor detectado através do exame do resíduo. Em contrapartida, se o erro grosseiro ocorre em uma observação com número de redundância “menor” este erro tem menor influencia no resíduo e sua detecção pode não ocorrer. Observações que apresentam maiores redundâncias parciais apresentam um melhor controle sobre erros grosseiros.

Para técnicas de detecção de erros grosseiros, que utilizam o resíduo da observação, a redundância parcial da observação apresenta-se como medida para o controle destes erros pelo fato desta redundância controlar a proporção que o erro grosseiro influencia o resíduo.

#### 2.1.8.3.1 Localização do erro grosseiro

A localização de erros grosseiros mediante a aplicação do teste *Data Snooping*, é realizada através da utilização individual de cada um dos resíduos  $\mathbf{v}_i$ . BAARDA (1968) propõem o teste *Data Snooping* que é uma técnica baseada na análise dos resíduos padronizados que no caso de observações não correlacionadas é escrito como,

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \quad (2.88)$$

para investigar a existência de erros grosseiros nas observações.

Nesta equação, segundo (KUANG, 1996, p. 132),  $\sigma_{v_i}$  pode ser expresso por:

$$\sigma_{v_i} = \sigma_{\ell_i} \sqrt{r_i}. \quad (2.89)$$

A tomada de decisão se existe ou não erros grosseiros em cada observação é realizada pelo seguinte teste de hipóteses:

Hipótese nula

$$H_0: \nabla l_i = 0$$

Hipótese alternativa

$$H_a: \nabla l_i \neq 0$$

A hipótese nula postula que na observação  $\ell_i$  não existe erro grosseiro ( $\nabla l_i = 0$ ) enquanto que a hipótese alternativa postula que nesta observação existe erro grosseiro ( $\nabla l_i \neq 0$ ).

Segundo Kuang (1996) sobre a Hipótese nula a estatística (2.88) segue a distribuição normal padronizada com média zero e variância unitária, isto é,

$$w_i | H_0 \sim N(0,1) \quad (2.90)$$

De acordo com o princípio do teste bilateral, dado o nível de significância  $\alpha_0$  a hipótese nula será rejeitada se

$$N_{0,5\alpha_0}(0,1) \leq w_i \leq N_{1-0,5\alpha_0}(0,1) \quad (2.91)$$

onde  $N_{0,5\alpha_0}(0,1)$  e  $N_{1-0,5\alpha_0}(0,1)$  são os valores críticos inferior e superior, respectivamente, para a estatística  $w_i$  calculados a partir da distribuição normal padronizada. Para a distribuição normal os valores críticos  $N_{0,5\alpha_0}(0,1)$  e  $N_{1-0,5\alpha_0}(0,1)$  são simétricos e assim de forma equivalente a relação (2.91) a hipótese nula será rejeitada se,

$$|w_i| \geq N_{1-0,5\alpha_0} \quad (2.92)$$

Por exemplo, se  $\alpha_0 = 0,001$  então  $N_{1-0,5 \times 0,001} = N_{0,9995} = 3,2905$  e a hipótese nula será rejeitada se  $|w_i| \geq 3,2905$ .

O teste *Data Snooping* é um teste unidimensional, que examina um resíduo de cada vez. A partir da equação (2.88) observa-se que as grandezas  $v_i$  e  $\sigma_{v_i}$  são dependentes do modelo matemático e das propriedades estocásticas das observações e portanto a aplicação do teste *Data Snooping* pressupõem que a rejeição da hipótese nula no teste global decorre de erros grosseiros nas observações e ainda se não houve rejeição da hipótese nula no teste global, o *Data Snooping* pode detectar erros grosseiros de pequena magnitude (KUANG, 1996, p.145).

Em SANTOS JUNIOR (2005) são encontradas aplicações e discussão sobre teoria de detecção de erros grosseiros em uma rede gravimétrica.

#### 2.1.8.3.2 Confiabilidade interna de uma rede geodésica

A investigação do problema do erro do tipo II em redes geodésicas, inicialmente feitas por Baarda resultou na teoria da confiabilidade. A idéia central é investigar as implicações da não rejeição da hipótese nula, que postula a não existência de um erro grosseiro na observação quando em realidade este erro pode existir, e como consequência cometer o erro do tipo II. Por meio dessa teoria pode-se estimar o valor mínimo de um erro grosseiro na observação (sendo que qualquer erro maior que este valor mínimo estimado deve ser sensível ao teste, ou seja, a hipótese alternativa deveria ser aceita).

A sensibilidade de uma rede geodésica frente a detecção de erros grosseiros é expressa pela confiabilidade interna que refere-se ao valor mínimo do erro grosseiro cometido na observação que é detectado usando o teste *Data Snooping*. De outra forma a confiabilidade interna é avaliada estimando-se um valor mínimo  $\nabla_0 \ell_i$  para

um erro grosseiro  $\nabla \ell_i$  o qual pode ser detectado pelo teste *Data Snooping* com uma probabilidade  $1-\beta_0$  se o teste (*Data Snooping*) tem um nível de significância  $\alpha_0$ .

Segundo Kuang (1996, p. 137) pode-se estimar um valor  $\nabla_0 \ell_i$  para um erro grosseiro  $\nabla \ell_i$  fazendo-se as seguinte considerações:

Um erro grosseiro  $\nabla \ell_i$  na observação  $\ell_i$  influencia o resíduo desta observação e em consequência estatística  $w_i$  dada pela relação (2.88). Assim considerando a relação (2.82) obtém-se

$$\nabla w_i = \frac{\nabla v_i}{\sigma_{\ell_i} \sqrt{r_i}} \quad (2.93)$$

mas  $\nabla w_i = \delta_i$  (ver figura 2.6) com isso a (2.93) escreve-se com auxílio da (2.84)

$$\delta_i = \frac{r_i \nabla l_i}{\sigma_{\ell_i} \sqrt{r_i}} = \frac{\nabla l_i \sqrt{r_i}}{\sigma_{\ell_i}}. \quad (2.94)$$

Desta maneira sobre a hipótese alternativa  $H_a$ , que postula a existência de um erro grosseiro  $\nabla \ell_i$  na observação  $\ell_i$ , a estatística  $w_i$  segue uma distribuição normal não-central com parâmetro de não-centralidade  $\delta_i$  e variância unitária, ou seja,

$$w_i | H_a \sim N(\delta_i, 1).$$

A partir da equação (2.94) pode se obter o valor para o erro grosseiro como,

$$\nabla l_i = \frac{\delta_i \sigma_{\ell_i}}{\sqrt{r_i}}. \quad (2.95)$$

Para um nível de significância  $\alpha_0$  e um poder do teste  $1-\beta_0$  o parâmetro de não centralidade  $\delta_i$  é  $\delta_0$  e significa a menor diferença entre as esperanças matemáticas da hipótese alternativa e nula. Desta forma fixando  $\alpha_0$  e  $1-\beta_0$  é possível obter um valor para o parâmetro de não centralidade  $\delta_0$  e estimar um valor para o erro grosseiro. Assim a partir da relação (2.95) tem-se,

$$\nabla \ell_i = \frac{\delta_o \sigma_{\ell_i}}{\sqrt{r_i}} \quad (2.96)$$

O limite mínimo para o erro grosseiro,  $\nabla_0 \ell_i$ , em uma observação na qual é cometido o erro do tipo II, com níveis de probabilidade  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  é dado por

$$|\nabla \ell_i| \geq \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \sigma_{\ell_i}, \quad (2.97)$$

sendo que a relação (2.97) significa que qualquer erro na observação maior ou igual à

$\frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \sigma_{\ell_i}$  será detectado com uma probabilidade de  $1 - \beta_0$ . Na expressão (2.97)  $\sigma_{\ell_i}$  é

o desvio padrão da observação e o  $\delta_0$ , como dito anteriormente, é o parâmetro de não centralidade e significa a diferença de esperanças matemáticas entre a as hipóteses alternativa e nula, ver figura 2.6 .

O parâmetro de não centralidade é obtido pela relação (MORAES, 1998, p.81):

$$\delta_0 = N \left( \frac{1 - \alpha_0}{2} \right) + |N_{\beta_0}| \quad (2.98)$$

onde N é a distribuição normal reduzida.

A dependência entre  $\alpha$ , usado no teste global, e  $\alpha_0$  para o teste *Data Snooping* pode ser encontrada por monogramas e está relacionado com o número de graus de liberdade (redundância) e esta dependência baseia-se na idéia que ambos os testes, global e *Data Snooping*, devem ser consistentes, ou seja, se o teste global acusa a existência de erros grosseiros então o *Data Snooping* também deve localizar observação com erro grosseiro e se  $\alpha$  e  $\alpha_0$  forem escolhidos ambos aleatoriamente os dois testes podem ser inconsistentes. Na tabela, adaptada de KAVOURAS (1982), estão apresentados alguns valores para o parâmetro de não centralidade com  $\delta_0^2 = \lambda_0$  para 10 graus de liberdade considerando a dependência entre  $\alpha$  e  $\alpha_0$  (Anexo).

QUADRO 2.2- VALORES PARA O PARÂMETRO DE NÃO CENTRALIDADE

$\alpha_0$	$1-\beta_0$	$\alpha$	$N\left(1-\frac{\alpha_0}{2}\right)$	$ N_{\beta_0} $	$\lambda_0$	$\delta_0 = \sqrt{\lambda_0}$
0,05	0,80	0,30	1,960	0,842	7,85	2,80
0,05	0,90	0,35	1,960	1,282	10,51	3,24
0,001	0,80	0,04	3,290	0,842	17,07	4,13
0,001	0,90	0,05	3,290	1,282	20,9	4,57

## Exemplo 2.7

Para o cálculo do parâmetro de não centralidade da terceira linha do quadro 2.2 no nível de significância  $\alpha = 0,04$  para o teste global e poder de teste  $1-\beta_0 = 0,80$  os seguintes passos podem ser feitos:

- 1º) Escolhe-se o nível de significância para o teste global que neste exemplo é  $\alpha = 0,04$  ;
- 2º) Escolhe-se a probabilidade para o poder teste que neste caso é  $1-\beta_0 = 0,80$  em consequência  $\beta_0 = 0,20$  ;
- 3º) Para estimar o valor de  $\alpha_0$  dependente de  $\alpha$  utilizando-se do monograma faz-se:

No monograma para  $1-\beta_0 = 0,80$  (Anexo) verificar o eixo b que escalona os números de graus de liberdade, neste caso  $b = r = 10$  . Encontrar a intersecção da linha vertical para  $b = r = 10$  com a curva fixada para  $\alpha = 0,04$  e então projetar o ponto desta intersecção com a linha vertical da direita ou esquerda do gráfico designada por  $100\alpha_0$  com isso encontra-se  $100\alpha_0 = 0,1$  logo  $\alpha_0 = 0,001$ . Pela construção gráfica sugerida anteriormente, quando se faz uso dos monogramas, pode-se dizer que “ $\alpha_0$  é estimado”.

- 4º) Para aplicar a relação (2.98) obtém-se por meio dos valores críticos tabelados da distribuição normal reduzida as grandezas que para este exemplo são:

$$N\left(1-\frac{\alpha_0}{2}\right) = N\left(1-\frac{0,001}{2}\right) = N_{0,9995} = 3,290$$

$$\left|N_{\beta_0}\right| = \left|N_{0,20}\right| = |-0,842| = 0,842$$

e com a aplicação da relação (2.98) consegue-se

$$\delta_0 = N\left(1-\frac{\alpha_0}{2}\right) + \left|N_{\beta_0}\right| = N_{0,9995} + \left|N_{0,20}\right| = 3,29 + 0,842 = 4,13$$

e também  $\lambda_0 = \delta_0^2 = 4,13^2 \cong 17,07$ .

#### 2.1.8.4 Confiabilidade externa de uma rede geodésica

A confiabilidade externa é dividida em confiabilidade externa local e confiabilidade externa geral. Ela é a influência de cada um dos erros não-detectados nos parâmetros obtidos do ajustamento ou nas funções destes parâmetros. A magnitude de um erro não detectado pode ser estimada pela relação (2.97), isto é, se um erro não é detectado em uma observação, então o limite superior para sua magnitude é igual a

$$\nabla l_i = \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \sigma_{\ell_i}. \quad (2.99)$$

Impõem-se que a observação apresenta um erro ao menos menor ou igual a

$\frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \sigma_{\ell_i}$  e para a verificação do efeito deste erro na determinação dos parâmetros

pode-se supor que  $\nabla l_i = \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \sigma_{\ell_i}$ .

### 2.1.8.5 Confiabilidade externa local

A confiabilidade externa trata da influência de possíveis erros grosseiros  $\nabla l_i$  não detectados sobre os parâmetros estimados, ou seja, quantifica a influência da porção do erro grosseiro na obtenção ou nas funções dos parâmetros.

O cálculo das correções aos parâmetros dados pela relação (2.27) é em particular função do valor observado como pode ser visto comparando a relação (2.24) com a (2.27). Desta forma considerando  $\nabla \mathbf{l} = [\nabla l_1 \quad \nabla l_2 \quad \dots \quad \nabla l_i \quad \dots \quad \nabla l_n]$  sendo um vetor onde cada componente é o erro grosseiro  $\nabla l_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  cometido em cada observação então a obtenção do vetor das correções  $\mathbf{x}_v$ , sem a presença do erro grosseiro é calculado pela relação (2.27) como

$$\mathbf{x}_v = -\mathbf{N}^+ \mathbf{A}^t \mathbf{P}(\ell - \nabla \mathbf{l}) = -\mathbf{N}^+ \mathbf{A}^t \mathbf{P} \ell + \mathbf{N}^+ \mathbf{A}^t \mathbf{P} \nabla \mathbf{l} = -\mathbf{x} + \nabla \mathbf{x} \quad (2.100)$$

sendo  $\mathbf{N}$  a matriz dos coeficientes das equações normais  $(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})$ ,  $\mathbf{x}$  o vetor das correções aos parâmetros e  $\nabla_{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^+ \mathbf{A}^t \mathbf{P} \nabla \mathbf{l}$  o vetor da influência do erro grosseiro de cada observação na determinação dos parâmetros.

A expressão (2.100) explicita o valor da influência dos erros grosseiros na determinação dos parâmetros.

Para verificar a influência isolada de cada erro grosseiro, um por vez, na determinação dos parâmetros faz-se

$$\mathbf{x}_{v,i} = -\mathbf{N}^+ \mathbf{A}^t \mathbf{P}(\ell - \mathbf{e}_i \nabla l_i) = -\mathbf{N}^+ \mathbf{A}^t \mathbf{P} \ell + \mathbf{N}^+ \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{e}_i \nabla l_i = -\mathbf{x} + \nabla_{0,i} \mathbf{x} \quad (2.101)$$

com  $\mathbf{e}_i$  a  $i$ -ésima coluna da matriz identidade  $n \times n$  e

$$\nabla_{0,i} \mathbf{x} = \mathbf{N}^+ \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{e}_i \nabla l_i \quad (2.102)$$

Como o erro grosseiro  $\nabla l_i$  pode ser estimado por  $\nabla \ell_i$  então usando a relação (2.96) na relação (2.102) obtém-se a influência do erro mínimo estimado na determinação dos parâmetros dado por,



$$\nabla_{0,i} \mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{e}_i \nabla \ell_i \quad (2.103)$$

ZHANG e LI (1990) propõem que os menores erros grosseiros possíveis de serem detectados é de 6 a 8 vezes o desvio padrão da observação.

#### 2.1.8.6 Confiabilidade externa geral de uma rede geodésica

Uma medida para a confiabilidade externa, para observações não correlacionadas, pode ser escrita como (MIERLO, 1981, p.96):

$$\delta_i^2 = \frac{\sigma_{\hat{\ell}_i}^2}{\sigma_{v_i}^2} \lambda_0 \quad (2.104)$$

onde  $\sigma_{\hat{\ell}_i}^2 = q_{\hat{\ell}_i}$  é a i-ésima variância da observação ajustada obtida pela relação (2.80),

$\sigma_{v_i}^2$  a variância do i-ésimo resíduo e  $\lambda_0 = \delta_0^2$ .

As quantidades  $\delta_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ), consideradas como uma medida para a confiabilidade externa da rede medem a distorção ou a influência de um erro na determinação dos parâmetros de uma rede causada por um erro em uma única observação. BAARDA (1977) estabelece que grandes diferenças nos valores numéricos de  $\delta_i$  indicam que a possibilidade de detectar erros na rede é heterogênea e propõem como medida para a confiabilidade externa de uma rede a quantidade

$$\bar{\delta}_0 \stackrel{\text{def}}{=} (\delta_i)_{\text{máximo}} = \delta_{x,\text{máx}} \quad (2.105)$$

com especificação do nível de significância  $\alpha_0$  e do poder do teste  $1-\beta_0$ .

Desta forma é suficiente descrever a confiabilidade externa de uma rede pelos elementos  $\bar{\delta}_0$ ,  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ .

A equação (2.104) é reescrita como

$$\delta_i = \frac{\sigma_{\hat{\ell}_i}}{\sigma_{v_i}} \delta_0 \quad (2.106)$$

considerando  $\delta_0 = \sqrt{\lambda_0}$ .

Na equação (2.104) a partir da equação (2.79) tomando

$$\sigma_{\hat{\ell}_i}^2 = q_{\hat{\ell}_{ii}} = \frac{1 - r_i}{p_i} \quad (2.107)$$

e ainda escrevendo o  $i$ -ésimo elemento da diagonal principal da matriz das covariâncias do resíduo estabelecido na equação (2.75) como

$$\sigma_{v_i}^2 = \frac{1}{p_i} - \mathbf{a}_i^t (\mathbf{APA})^+ \mathbf{a}_i \quad (2.108)$$

consegue-se a confiabilidade externa geral (LEICK, 1995 apud MORAES, 1998, p.42) ou deformação da rede (FÖRSTNER, 1979 apud JÄGER, 1988, p.106) que nas condições acima fica definida pela expressão:

$$\delta_x = \lambda_{0i} = \delta_0 \sqrt{\frac{1 - r_i}{r_i}} \quad (2.109)$$

a equação (2.109) mostra que se os  $\delta_x$ 's forem de mesma magnitude, a rede é homogênea em relação à confiabilidade externa pois o “erro geral” causado pelo erro grosseiro varia em um mesmo valor. Quanto menor for o  $r_i$  mais significativo será a falsificação, das grandezas estimadas na rede, causada por um erro grosseiro  $\nabla l_i$ .

## 2.2 OTIMIZAÇÃO DOS PESOS PARA MELHORAR A CONFIABILIDADE DA OBSERVAÇÃO

Os números de redundância  $r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , estão sempre no intervalo entre 0 e 1 sendo que a somatória total destes números fornece a redundância total ( $r$ ) da rede e reflete a rigidez da rede em detectar erros grosseiros nas observações. Por causa disto, o número de redundância é o principal critério tanto para a confiabilidade interna quanto a externa. Em casos reais é desejável ter uma rede com números de redundância relativamente grandes e uniformes para que a detecção de erros seja máxima e a mesma em toda parte da rede. BAARDA (1968) propõem como critério ótimo tanto para a confiabilidade interna como para a confiabilidade externa a relação,

$$\min(r_i) = r_{\min} \rightarrow \text{máximo} \quad (2.110)$$

ou seja, os menores números de redundância devem ser os maiores possíveis.

O “máximo” na relação (2.110) pode ser a redundância média  $\bar{r}$  da rede, que é calculada como,

$$\bar{r} = \frac{gl}{n} = \frac{r}{n} = \frac{\text{tr}(\mathbf{R})}{n} \quad (2.111)$$

sendo  $gl = r$  número de graus de liberdade,  $n$  número de observações e  $\text{tr}(\mathbf{R})$  traço da matriz de redundância como exposto na relação (2.81).

Se as observações são consideradas divididas em grupos então tanto a matriz de configuração  $\mathbf{A}$  como a matriz dos pesos  $\mathbf{P}$  podem ser particionadas da seguinte forma,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & & & \\ & \mathbf{P}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{P}_m \end{bmatrix}$$

onde  $\mathbf{A}_{i(n_i \times u)}$  matriz de configuração e  $\mathbf{P}_{i(n_i \times n_i)}$  matriz dos pesos do  $i$ -ésimo grupo de observações respectivamente com  $i = 1, 2, \dots, m$  e ainda  $n_i$  número de observações do  $i$ -ésimo grupo.

Desta forma obtém-se,

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{I}_i - \mathbf{A}_i (\mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}_i^t \mathbf{P}_i \quad (2.112)$$

onde  $\mathbf{R}_i$  tem dimensão  $n_i \times n_i$  e é a matriz de redundância do  $i$ -ésimo grupo de observações. O traço da relação (2.112) é expresso por,

$$\text{tr}(\mathbf{R}_i) = gl_i \quad (2.113)$$

que é a contribuição das observações do tipo  $i$  para a redundância total ( graus de liberdade) do sistema. Em uma rede em que os números de redundância das observações devem se equivaler para diferentes tipos de observações tem-se,

$$\bar{r}_i = \frac{gl_i}{n_i} = \frac{r}{n} = \bar{r} \text{ para } i = 1, 2, \dots, m \quad (2.114)$$

ou de forma equivalente

$$gl_i = \text{tr}(\mathbf{R}_i) = \frac{r}{n} n_i. \quad (2.115)$$

A equação (2.115) significa que a contribuição do  $i$ -ésimo grupo de observações para a redundância do sistema deve ser proporcional ao número de observações do  $i$ -ésimo grupo.

### 2.2.1 Formulação do Planejamento de Segunda Ordem para Confiabilidade

Como mencionado anteriormente, os elementos da diagonal da matriz  $\mathbf{R}$  são os números de redundância das observações que descrevem a capacidade da rede em detectar erros grosseiros desta forma pode-se construir métodos que proporcione a busca por pesos que definem um número de redundância pré-definido.

A solução do problema de segunda ordem para alcançar uma rede em que diferentes grupos de observações têm sua confiabilidade melhorada é apresentada em AMIRI-SIMKOOEI (2001, 2004) AMIRI-SIMKOOEI e ALI SHARIFI (2004) e é descrito a seguir.

No estágio de otimização dos pesos para confiabilidade os pesos iniciais do  $i$ -ésimo grupo de observações pode ser melhorado escalonando este grupo por um fator  $K$  como segue,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{P}_i & \\ & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{P}_m \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{P}(K) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & & & \\ & & K \times \mathbf{P}_i & \\ & & & \\ & & & \mathbf{P}_m \end{bmatrix}. \quad (2.116)$$

A matriz  $\mathbf{P}(K)$  pode ser decomposta em duas parcelas como

$$\mathbf{P}(K) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & & \\ & \mathbf{P}_i & \\ & & \mathbf{P}_m \end{bmatrix} + (K-1) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \\ & \mathbf{P}_i & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.117)$$

De forma equivalente a relação (2.117) pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathbf{P}(K) = \mathbf{P} + (K-1)\mathbf{P}_i^K \quad (2.118)$$

$$\text{onde } \mathbf{P}_i^K = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{P}_i & \\ & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

A partir da relação (2.112) utilizando (2.117) de tal forma que se obtenha a relação (2.114) escreve-se,

$$\text{tr}(\mathbf{R}_i) = n_i - \text{tr} \left[ \mathbf{A}_i \left( \mathbf{A}^t \mathbf{P}(K) \mathbf{A} \right)^+ \mathbf{A}_i^t \mathbf{K} \mathbf{P}_i \right] = \frac{r}{n} n_i \quad (2.119)$$

de forma equivalente a relação (2.119) pode ser escrita como,

$$\text{tr} \left[ \mathbf{A}_i \left( \mathbf{A}^t \mathbf{P}(K) \mathbf{A} \right)^+ \mathbf{A}_i^t \mathbf{K} \mathbf{P}_i \right] = n_i - \frac{r}{n} n_i = \frac{n_i n - n_i r}{n} \quad (2.120)$$

ou ainda considerando  $r = n - u$

$$\text{tr} \left[ \mathbf{A}_i \left( \mathbf{A}^t \mathbf{P}(\mathbf{K}) \mathbf{A} \right)^+ \mathbf{A}_i^t \mathbf{K} \mathbf{P}_i \right] = \frac{n_i u}{n}. \quad (2.121)$$

Usando a identidade  $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$  e fazendo a substituição da relação (2.118) na (2.121) consegue-se

$$\text{tr} \left[ \mathbf{K} \mathbf{A}_i^t \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \left( \mathbf{A}^t (\mathbf{P} + (\mathbf{K} - 1) \mathbf{P}_i^{\mathbf{K}}) \mathbf{A} \right)^+ \right] = \frac{n_i u}{n} \quad (2.122)$$

ou ainda

$$\text{tr} \left[ \mathbf{K} \mathbf{N}_i \left( \mathbf{N} + (\mathbf{K} - 1) \mathbf{N}_i \right)^+ \right] = \frac{n_i u}{n} \quad (2.123)$$

onde  $\mathbf{N}_i = \mathbf{A}_i^t \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i$  e  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}$ .

Usando a expansão em serie de Taylor (AMIRI-SIMKOOEI, 2004, p.555),

$$\left( \mathbf{N} + (\mathbf{K} - 1) \mathbf{N}_i \right)^+ = \mathbf{N}^+ - (\mathbf{K} - 1) \mathbf{N}^+ \mathbf{N}_i \mathbf{N}^+ + (\mathbf{K} - 1)^2 \mathbf{N}^+ \mathbf{N}_i \mathbf{N}^+ \mathbf{N}_i \mathbf{N}^+ + \dots \quad (2.124)$$

Substituindo a relação (2.124) na (2.123) encontra-se

$$\text{tr} \left[ \mathbf{K} \mathbf{N}_i \left( \mathbf{N}^+ - (\mathbf{K} - 1) \mathbf{N}^+ \mathbf{N}_i \mathbf{N}^+ + (\mathbf{K} - 1)^2 \mathbf{N}^+ \mathbf{N}_i \mathbf{N}^+ \mathbf{N}_i \mathbf{N}^+ + \dots \right) \right] = \frac{n_i u}{n} \quad (2.125)$$

e fazendo uma aproximação linear tem-se

$$\text{tr} [\mathbf{K} \mathbf{N}_i \mathbf{N}^+] \cong \frac{n_i u}{n}. \quad (2.126)$$

Desta forma o valor da grandeza  $\mathbf{K}$  pode ser obtido iterativamente resolvendo-se a equação linear em cada passo como,

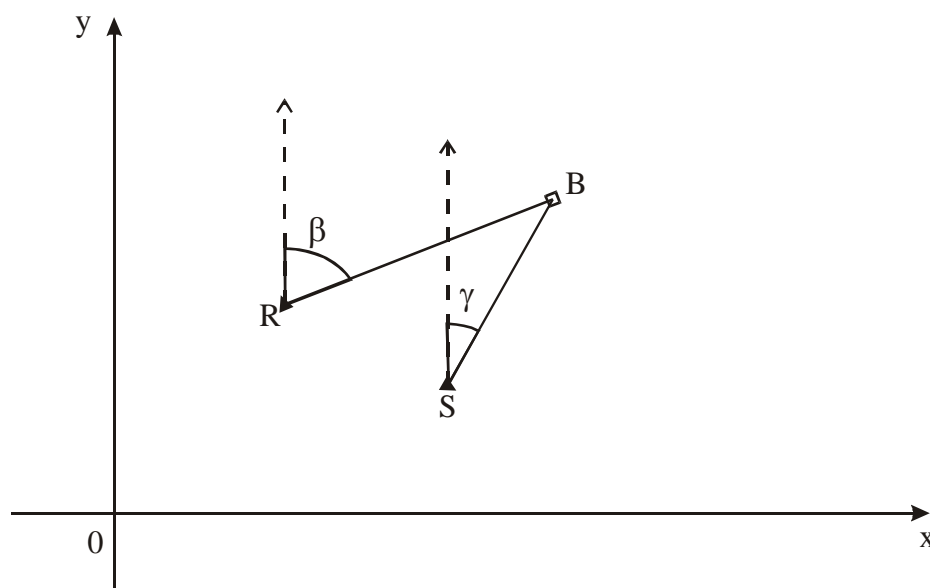
$$\mathbf{K} = \frac{n_i u}{n [\text{tr}(\mathbf{N}_i \mathbf{N}^+)]}. \quad (2.127)$$

Obtendo o valor de  $\mathbf{K}$  e multiplicando por  $\mathbf{P}_i$  consegue-se o peso ótimo para as observações do  $i$ -ésimo grupo. Em função da expansão em série de Taylor a solução ótima para  $\mathbf{K}$  é obtida por meio de iterações e que são paradas quando o coeficiente  $\mathbf{K}$  converge para um.

### Exemplo 2.8

Neste exemplo, um ponto em coordenadas planas deve ser obtido. Para isto são planejadas quatro observações, duas de distância e duas de ângulo conforme a figura 2.7. O quadro 2.3 fornece as coordenadas conhecidas e as coordenadas aproximadas dos pontos. Objetiva-se otimizar os pesos por critérios de confiabilidade.

FIGURA 2.7 – PLANEJAMENTO DA CONFIABILIDADE



As coordenadas conhecidas dos pontos R e S e as coordenadas aproximadas do ponto B são:

QUADRO 2.3 – COORDENADAS HORIZONTAIS: PLANEJAMENTO DA CONFIABILIDADE DA OBSERVAÇÃO

Ponto	Coordenadas	
	x (m)	y (m)
R	200	500
S	400	300
Ponto	Coordenadas aproximadas	
B	600	582

O modelo funcional das quatro observações, divididas em:

Duas observações de distância:

$$d_1 = \sqrt{(x_b - 200)^2 + (y_b - 500)^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x_b - 400)^2 + (y_b - 300)^2}$$

duas observações de direção:

$$\beta = \arctan\left(\frac{x_b - 200}{y_b - 500}\right)$$

$$\gamma = \arctan\left(\frac{x_b - 400}{y_b - 300}\right).$$

Com isto obtém-se a matriz de configuração **A** dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,97963 & 0,20082 \\ 0,57850 & 0,81568 \\ 0,00049 & -0,00240 \\ 0,00236 & -0,00167 \end{bmatrix}.$$

Supondo que a matriz dos pesos das observações seja igual a matriz identidade, ou seja,  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$  obtém-se as seguintes redundâncias parciais obtidas da diagonal principal da matriz de redundância dada pela relação (2.77),

$$r_1 = 0,000026, r_2 = 0,000024, r_3 = 0,99998 \text{ e } r_4 = 0,99997.$$

Observando as redundâncias parciais se conclui que, nesta situação, as duas observações de distância apresentam baixa controlabilidade (ver quadro 2.1). A matriz de redundância conseguida pela relação (2.112) considerando as duas observações de distância apresenta o traço  $\text{tr}(\mathbf{R}_1) = \text{tr}(\mathbf{R}_2) = 0,00005$  obtido pelas relação (2.113) e a matriz de redundância considerando as duas observações de ângulo é  $\text{tr}(\mathbf{R}_1) = \text{tr}(\mathbf{R}_2) = 1,99995$ . Sendo a redundância total do sistema  $r = 2$  pode-se concluir que as duas observações de distância contribuem pouco para a redundância



total, cerca de 0,0025 por cento (0,0025%) comparativamente às duas observações de ângulo que apresentam altas redundâncias parciais contribuindo significativamente para a redundância total cerca de 99,9975%.

A idéia da otimização dos pesos, com critério de confiabilidade está em modificar os pesos, homogeneizando a contribuição de cada grupo de observações para a redundância total  $r$  do sistema, aumentando as menores e diminuindo as maiores redundâncias parciais e em conseqüência melhorar a confiabilidade de cada observação.

Neste caso pretende-se otimizar os pesos para que o grupo de observações de distância contribua com aproximadamente 50% para a redundância total, isto é, que cada submatriz de redundância, uma para cada grupo, tenha em média o traço igual a um.

Para isto tem-se :

Número de observações do grupo:

$$n_1 = n_2 = 2$$

Número de parâmetros

$$u = 2$$

Número de observações

$$n = 4$$

Submatriz de configuração

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0,97963 & 0,20082 \\ 0,57850 & 0,81568 \end{bmatrix}.$$

Considerando a equação (2.119) deve-se obter o valor de  $K$  para conseguir os pesos que levam o traço da submatriz de redundância das observações a ser

$$\text{tr}(\mathbf{R}_i) = 1.$$

Aplicando a relação (2.127) iterativamente com pesos iniciais igual a identidade, ou seja,  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$  consegue-se modificar os pesos para

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,00000708391563 & & & \\ & 0,00000708391563 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

As novas redundâncias parciais obtidas da diagonal principal da matriz de redundância, fornecidas pela relação (2.77) aplicando os pesos anteriores obtidos do processo de otimização são,

$$r_1 = 0,519285, \quad r_2 = 0,480715, \quad r_3 = 0,563424 \text{ e } r_4 = 0,436576.$$

Observa-se pela solução obtida do processo que os pesos iniciais atribuídos às duas observações de distâncias diminuem, ou seja, a precisão de cada observação de distância deve ser melhor que a precisão inicial para que a redundância de cada observação seja melhorada.

### 3 METODOLOGIA: A OTIMIZAÇÃO DOS PESOS BASEADA EM UM PROBLEMA DE VALOR PRÓPRIO INVERSO

Neste capítulo serão apresentados os valores próprios associados a uma matriz de covariâncias, a formulação numérica para a otimização dos pesos pelo problema de valor próprio inverso, o algoritmo do método de Newton com busca linear e região de confiança e ainda o método LP, os quais possibilitam a solução irrestrita para a otimização dos pesos. O algoritmo de Lagrangeano Aumentado é descrito para a solução restrita do problema e ainda estão apresentadas considerações sobre as restrições aos pesos com critério de confiabilidade, sendo a otimização espectral com restrições de precisão e confiabilidade formulada.

#### 3.1 OTIMIZAÇÃO DOS PESOS DAS OBSERVAÇÕES GEODÉSICAS BASEADA EM VALORES PRÓPRIOS

Uma forma de se obter pesos otimizados, é o uso dos valores próprios associados à matriz de covariâncias dos parâmetros ajustados, em termos das Componentes Principais, os quais possuem informações sobre a qualidade da rede. O objetivo é estabelecer valores próprios que conduzam a matriz de covariâncias à apresentação de uma estrutura espectral<sup>2</sup> ideal e de forma que possua os valores próprios requeridos.

O valor próprio máximo da matriz de covariâncias dos parâmetros estimados é de interesse particular neste processo de otimização, pois este permite obter informação sobre uma precisão limite para quaisquer grandezas estimadas a partir da rede (NINKOV; SCHMITT, 1983, p. 217). Com efeito, para uma função  $y$  do modelo funcional da equação de observação, após linearização pela expansão de Taylor vale,

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}_j \mathbf{x} \quad (3.1)$$

---

<sup>2</sup> Espectro: conjunto dos valores próprios de uma matriz

onde  $\mathbf{a}_j$  é j-ésima linha da matriz de configuração (ou matriz planejamento)  $\mathbf{A}$  e para a sua variância após aplicação da lei de propagação de covariâncias tem-se

$$\sigma_y^2 = \mathbf{a}_j \mathbf{Q}_x \mathbf{a}_j^t. \quad (3.2)$$

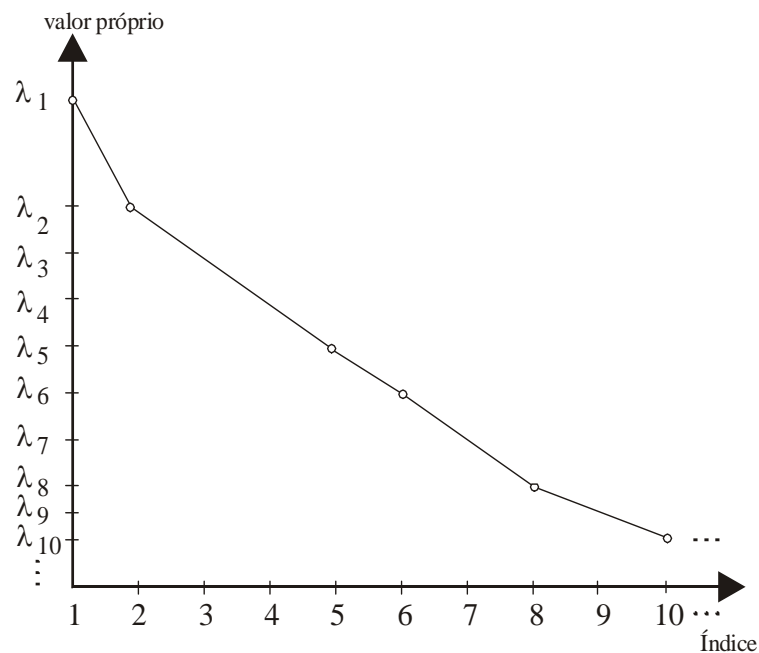
Com o auxílio do Quociente Rayleigh (WANG;CHOW, 1994, p. 38) obtém-se uma estimativa para  $\sigma_y^2$  pela expressão

$$\mathbf{a}_j \mathbf{a}_j^t \lambda_{\min} \leq \sigma_y^2 \leq \mathbf{a}_j \mathbf{a}_j^t \lambda_{\max} \quad (3.3)$$

com  $\lambda_{\max}$  e  $\lambda_{\min}$  obtidos de (2.29).

Da relação (3.3) decorre a exigência que o valor próprio máximo da matriz de covariâncias dos parâmetros estimados deve ser mínimo. Quanto maior for um valor próprio, comparativamente em relação aos outros elementos do espectro, mais desfavorável e não homogêneo será o comportamento da precisão como mostra a figura 3.1. O ideal é que o espectro da matriz de covariâncias seja o mais homogêneo possível.

FIGURA 3.1 – EXEMPLO DA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO ESPECTRO DE UMA MATRIZ



Com a definição de um valor limite superior para a precisão dos parâmetros tem-se o valor próprio máximo que é pretendido para a matriz de covariâncias.

A decomposição espectral completa da matriz dos cofatores de covariância  $\mathbf{Q}_x$ , representada por

$$\mathbf{Q}_x = \mathbf{M}^t \mathbf{\Lambda} \mathbf{M} \quad \text{com } \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-d}) \quad (3.4)$$

ou então

$$\sum_{i=d+1}^n \lambda_i \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^t, \quad (3.5)$$

onde  $d$  representa o defeito da rede ou deficiência de posto da matriz, ou seja,  $\mathbf{Q}_x$  sendo singular apresenta  $d$  valores próprios iguais a zero (KALTENBACH, 1992, p. 26). Sendo  $d = 0$ ,  $\mathbf{Q}_x$  possui posto completo.

Dos valores próprios resultam os comprimentos dos semi-eixos do hiperelipsóide  $(n-d)$ -dimensional e os vetores próprios  $\mathbf{m}_i$  indicam as direções dos semi-eixos  $\lambda_i$ .

Considerando  $\lambda_1 = \lambda_{\text{máx}}$  como valor próprio dominante e a expressão de somatório dada em (3.5), a matriz de cofatores  $\mathbf{Q}_x$  pode ser descrita pela parte dominante, isto é,  $\mathbf{Q}_x \cong \lambda_1 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_1^t$ , onde o vetor próprio  $\mathbf{m}_1$  corresponde a chamada forma de fraqueza principal da rede (KALTENBACH, 1992, p. 27).

A forma de fraqueza principal indica a direção  $\theta$  na qual os pontos são piores determinados, e pode ser obtida através da análise das componentes principais.

Com o problema de valor próprio inverso aplicado à otimização dos pesos, quer-se garantir que qualquer desvio padrão estimado a partir da rede não cruze um valor limite pré-estabelecido, com isso o valor próprio máximo da matriz  $\mathbf{Q}_x$  pode ser fixado e tido como um valor limite  $\lambda_{\text{máx}}^*$  (valor próprio máximo pretendido), o qual se torna o objetivo no processo de otimização dos pesos modelado por um problema de valor próprio máximo.

### 3.1.1 Problema de Valor Próprio Inverso Aplicado na Otimização dos Pesos em Levantamentos Geodésicos

Considere-se a matriz dos coeficientes das equações normais

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{A}$ , é matriz de planejamento conhecida,  $\mathbf{P}$  é matriz dos pesos diagonal tomada como incógnita e para este caso  $n$  é o número de observações e  $u$  número de parâmetros associados ao método dos mínimos quadrados na forma paramétrica.

A matriz  $\mathbf{N}$  assim definida é função dos elementos diagonais da matriz  $\mathbf{P}$ .

#### Exemplo 3.1

$$\text{sejam as matrizes } {}_3\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } {}_3\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} p_1 & & \mathbf{0} \\ & p_2 & \\ \mathbf{0} & & p_3 \end{bmatrix}.$$

Substituindo essas matrizes em  $\mathbf{N}$  resulta

$$\mathbf{N}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} p_1 + p_3 & -p_3 \\ -p_3 & p_2 + p_3 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

A matriz  $\mathbf{N}$  é função dos elementos diagonais de  $\mathbf{P}$  e escreve-se  $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ . As modificações nos elementos diagonais de  $\mathbf{P}$  agem diretamente sobre a magnitude dos valores próprios da matriz  $\mathbf{N}$  e como consequência também em  $\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+$ , os quais são usados na análise da qualidade de redes geodésicas. Com isso podem ser formuladas condições para tais valores próprios e determinar os pesos que levam a (3.7) a apresentar características ótimas em termos de valores próprios.

Especificamente no caso da otimização dos pesos das observações geodésicas e considerando a matriz dos pesos na forma diagonal, a expressão (3.6) é escrita na forma (2.31), como

$$\mathbf{N} = \sum_{j=1}^n p_j \mathbf{a}_j^t \mathbf{a}_j \quad (3.8)$$

onde  $n$  é o numero de observações,  $\mathbf{a}_j$  é a  $j$ -ésima linha da matriz planejamento  $\mathbf{A}$  e  $p_j = p_{jj}$  é cada elemento da diagonal principal da matriz dos pesos  $\mathbf{P}$  e representa o peso atribuído a  $j$ -ésima observação. Desta forma é estabelecido a ligação entre a otimização dos pesos das observações geodésicas e um problema de valor próprio inverso.

### 3.2 FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA UM PROBLEMA DE VALOR PRÓPRIO INVERSO

A formulação numérica de um problema de valor próprio inverso, considera as grandezas  $\lambda_1(\mathbf{c}) \leq \lambda_2(\mathbf{c}) \leq \dots \leq \lambda_i(\mathbf{c}) \leq \dots \leq \lambda_n(\mathbf{c})$  como sendo os valores próprios

da matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{c}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{A}_k$ .

Formulação II:

Dados  $n$  números reais  $\lambda_1^* \leq \lambda_2^* \leq \dots \leq \lambda_i^* \leq \dots \leq \lambda_n^*$ , encontrar o vetor  $\mathbf{c}^* \in \mathbb{R}^n$ , tal que  $\lambda_i(\mathbf{c}^*) = \lambda_i^*$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Esta formulação pode ser colocada como um problema de solucionar o sistema não-linear,  $\mathbf{F}(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$  onde

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}) = \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{c}) - \lambda_1^* \\ \vdots \\ \lambda_i(\mathbf{c}) - \lambda_i^* \\ \vdots \\ \lambda_n(\mathbf{c}) - \lambda_n^* \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

com  $\lambda_1(\mathbf{c}) \leq \lambda_2(\mathbf{c}) \leq \dots \leq \lambda_i(\mathbf{c}) \leq \dots \leq \lambda_n(\mathbf{c})$ .

Na área das Ciências Geodésicas, o interesse pelo problema de valor próprio inverso é motivado pelo planejamento de Redes Geodésicas, mais especificamente na obtenção dos pesos para as observações geodésicas.

### 3.2.1 Formulação Numérica para um Problema de Valor Próprio Inverso Aplicado na Otimização dos Pesos

A formulação numérica de um problema de valor próprio inverso aplicado na otimização dos pesos, para observações não-correlacionadas, considera  $\mathbf{p} = \text{diag}(\mathbf{P})$  e as grandezas  $\lambda_1(\mathbf{p}) \leq \lambda_2(\mathbf{p}) \leq \dots \leq \lambda_i(\mathbf{p}) \leq \dots \leq \lambda_u(\mathbf{p})$  como sendo os valores próprios

da matriz  $\mathbf{N}(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j \mathbf{a}_j^t \mathbf{a}_j$ .

Formulação II aplicada ao problema de otimização dos pesos é escrita como:

Dados  $u$  números reais como valores próprio  $0 \leq \lambda_1^* \leq \lambda_2^* \leq \dots \leq \lambda_i^* \leq \dots \leq \lambda_u^*$  associados à matriz de covariâncias dos

parâmetros estimados (2.29), encontrar o vetor  $\mathbf{p}^* \in \mathbf{R}^n$ , com  $\mathbf{p} = \text{diag}(\mathbf{P})$  tal que

$\lambda_i(\mathbf{p}^*) = \lambda_i^*$  para  $i = 1, 2, \dots, u$ . Esta formulação pode ser colocada como um problema

de solucionar o sistema não-linear,  $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$

onde



$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{p}) - \lambda_1^* \\ \vdots \\ \lambda_i(\mathbf{p}) - \lambda_i^* \\ \vdots \\ \lambda_u(\mathbf{p}) - \lambda_u^* \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

com  $\lambda_1(\mathbf{p}) \leq \lambda_2(\mathbf{p}) \leq \dots \leq \lambda_i(\mathbf{p}) \leq \dots \leq \lambda_u(\mathbf{p})$ .

A solução do sistema (3.10) conduz o projeto da rede geodésica à apresentar o conjunto de valores próprios pré-estabelecidos para a matriz de covariâncias dos parâmetros estimados e em consequência apresentar os pesos ótimos para a esta rede.

Na sequência serão apresentados métodos de programação não-linear para resolver ou encontrar a solução da formulação II.

### 3.2.2 Método de Newton para Solução da Formulação II

A partir da relação de normalidade tem-se

$$\mathbf{m}_i^t(\mathbf{c}) \mathbf{m}_i(\mathbf{c}) = 1, \quad (3.11)$$

em que  $\mathbf{m}_i(\mathbf{c})$  é o vetor próprio, em função de  $\mathbf{c}$ , correspondente ao valor próprio  $\lambda_i(\mathbf{c})$ .

Multiplicando (3.11) por  $\lambda_i(\mathbf{c})$  tem-se

$$\mathbf{m}_i^t(\mathbf{c}) \lambda_i(\mathbf{c}) \mathbf{m}_i(\mathbf{c}) = \lambda_i(\mathbf{c}). \quad (3.12)$$

considerando que  $\lambda_i \mathbf{m}_i(\mathbf{c}) = \mathbf{A}(\mathbf{c}) \mathbf{m}_i(\mathbf{c})$  e diferenciando a relação (3.12), obtém-se a variação do valor próprio  $\lambda_i$  em relação  $c_j$ , dada por

$$\frac{\partial \lambda_i(\mathbf{c})}{\partial c_j} = \mathbf{m}_i^t(\mathbf{c}) \mathbf{A}_j \mathbf{m}_i(\mathbf{c}). \quad (4.13)$$

O cálculo da segunda derivada  $\frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial c_j \partial c_p} = \lambda_{i,j,p}$   $j, p = 1, 2, \dots, n$  é obtida após a diferenciação total de (4.13),

$$\lambda_{i,j,p} = 2 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n \frac{(\mathbf{m}_s^t \mathbf{A}_p \mathbf{m}_i)(\mathbf{m}_s^t \mathbf{A}_j \mathbf{m}_i)}{\lambda_i - \lambda_s} \quad \text{para } \lambda_i \neq \lambda_s \quad (3.14)$$

onde  $\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{c})}{\partial c_j} = \mathbf{A}_j$  e  $\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{c})}{\partial c_p} = \mathbf{A}_p$ .

Para mais informações sobre este tópico consultar OLIVEIRA (2003).

Com as considerações acima a matriz Jacobiana é escrita como

$$\mathbf{J}_{i,j}(\mathbf{c}) = \mathbf{m}_i^t(\mathbf{c}) \mathbf{A}_j \mathbf{m}_i(\mathbf{c}). \quad (3.15)$$

De forma geral tem-se as seguintes considerações para a aplicação do método de Newton clássico na solução de um problema de valor próprio inverso e especificamente na otimização dos pesos. O desenvolvimento abaixo pode ser considerado quando  $\mathbf{c} = \text{diag}(\mathbf{P})$ .

Os passos para solucionar um problema de valor próprio inverso através do método de Newton, utilizando a formulação II, são:

escolher um valor inicial aproximado  $\mathbf{c}^0$  e para  $k = 0, 1, 2, \dots$  fazer

1. Formar a matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{c}^k)$ ;
2. obter os valores próprios  $\lambda(\mathbf{c}^k)$  e os vetores próprios  $\mathbf{m}(\mathbf{c}^k)$  de  $\mathbf{A}(\mathbf{c}^k)$ ;
3. parar se  $\|\lambda(\mathbf{c}^k) - \lambda^*\| < \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  representa a qualidade da aproximação, dado em um critério de parada estabelecido e  $\|(\bullet)\|$  é uma norma qualquer de um vetor ;
4. formar a matriz jacobiana  $\mathbf{J}(\mathbf{c}^k)$ ;

5. obter  $\mathbf{c}^{k+1}$  solucionando o sistema  $\mathbf{J}(\mathbf{c}^k)(\mathbf{c}^{k+1} - \mathbf{c}^k) = -\mathbf{F}(\mathbf{c}^k)$  e voltar ao passo 1.

Com a finalidade de interromper o processo iterativo, considerando que houve divergência, pode-se usar o critério que, para algum  $k$ , a norma  $\|\lambda(\mathbf{c}^k) - \lambda^*\|$  é maior que uma determinada tolerância permitida. Por exemplo,  $\|\lambda(\mathbf{c}^k) - \lambda^*\| > 10^8$ , ou um número máximo de iterações, por exemplo,  $k = 100$ .

### 3.2.3 Estratégias Globalizadas para o Método de Newton: Busca Linear e Região de Confiança

Nesta subseção serão apresentadas técnicas para globalizar o método de Newton. Tais técnicas são baseadas no problema de minimização de uma função sem restrições.

O método de Newton clássico comumente aplicado no caso de minimização de uma função não dá preferências para minimizadores, já que a condição de otimalidade para minimizar ou maximizar uma função é a mesma, ou seja,  $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ . Além do mais sua aplicação não apresenta garantias quanto à solução procurada, devendo-se partir de uma vizinhança da solução (MARTINEZ; SANTOS, 1995, p. 107). Se o ponto inicial não for suficientemente “bom” não haverá garantias de convergência. Em geral, afirmações de que o ponto inicial está próximo da solução tem sentido teórico, pois, em geral, não se conhece a priori a solução e nem sequer de quão próximo pode-se estar desta solução. Portanto, partindo-se de um ponto inicial, o método pode convergir ou não.

Desta forma é natural tentar modificar o método de Newton de maneira que tal modificação manifeste predileção por minimizadores e convirja independentemente do ponto inicial.

### 3.2.3.1 Método de Newton com busca linear

Para tanto, observa-se primeiro que, quando as direções  $\mathbf{s}_k$  são geradas como soluções de um sistema linear  $\mathbf{B}_k \mathbf{s}_k = -\nabla f(\mathbf{x}^k)$ , pré-multiplicando ambos os membros por  $\mathbf{s}_k$  se tem  $\mathbf{s}_k^t \mathbf{B}_k \mathbf{s}_k = -\mathbf{s}_k^t \nabla f(\mathbf{x}^k)$ . Com isso, considerando o conjunto  $\Omega = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \mid \nabla^t f(\mathbf{x}^k) \mathbf{s} < 0 \right\}$  os elementos de  $\Omega$  são chamados direções de descida. Portanto, direções de descida são geradas se  $\mathbf{B}_k > 0$ . Logo, a idéia é impor que as matrizes que geram direções de busca em métodos de minimização sejam definidas positivas.

O método de Newton para resolver o problema de minimizar uma função em  $\mathbb{R}^n$  com busca linear gera direções de descida dada por

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}^k) \mathbf{s}_k = -\nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (3.16)$$

que após modificações e incorporando as condições do algoritmo 2.2 é descrito com o seguinte algoritmo (MARTINEZ; SANTOS, 1985, p. 108):

#### Algoritmo 3.1 (Método de Newton com Busca Linear)

Dados  $\alpha \in (0,1), \beta > 0, \theta \in (0,1)$  e  $\mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$ , para  $k = 0$  escolhe-se  $\mathbf{x}^0$  e faz-se para  $k = 0,1,2,\dots$  a seguinte seqüência de passos

1. Se  $\nabla f(\mathbf{x}^k) = \mathbf{0}$ , parar

Se  $\nabla f(\mathbf{x}^k) \neq \mathbf{0}$  executar o passo 2 até o passo 8

2. tentar solucionar (3.16) usando a fatoração de Cholesky:  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^k) = \mathbf{L}\mathbf{L}^t$

3. se a decomposição de Cholesky pôde ser realizada, obter  $\mathbf{s}_k$  resolvendo

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = -\nabla f(\mathbf{x}^k)$$

$$\mathbf{L}^t \mathbf{s}_k = \mathbf{y}$$

4. Se no passo 2 a decomposição de Cholesky fracassou, então definir

$\mathbf{B}_k = \nabla^2 f(\mathbf{x}_k) + \mu \mathbf{I}$ ,  $\mu > 0$ . Escolher  $\mu$  de maneira que  $\mathbf{B}_k$  seja definida positiva. Com isso a decomposição de Cholesky é aceita e  $\mathbf{B}_k = \mathbf{L}\mathbf{L}^t$ . Obtém-se  $\mathbf{s}_k$  resolvendo

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = -\nabla f(\mathbf{x}^k)$$

$$\mathbf{L}^t \mathbf{s}_k = \mathbf{y}$$

5. se  $\nabla f(\mathbf{x}^k)^t \mathbf{s}_k > -\theta \|\nabla f(\mathbf{x}^k)\| \|\mathbf{s}_k\|$  a condição do ângulo não é satisfeita, corrige-se  $\mu$  fazendo  $\mu = \text{máximo}\{2\mu, 10\}$  e repete-se o passo 4 como se tivesse havido fracasso na fatoração de Cholesky

6. Se  $\|\mathbf{s}_k\| < \beta \|\nabla f(\mathbf{x}^k)\|$  corrige-se  $\mathbf{s}_k$  com

$$\mathbf{s}_k = \beta \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}^k)\|}{\|\mathbf{s}_k\|} \mathbf{s}_k$$

7. Enquanto

$$f(\mathbf{x}^k + t\mathbf{s}_k) > f(\mathbf{x}^k) + \alpha t \nabla f(\mathbf{x}^k)^t \mathbf{s}_k$$

$$\text{escolher } t = \frac{1}{2} \bar{t}$$

8. fazer  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + t\mathbf{s}_k$  voltando-se ao passo 1.

No passo 4 do algoritmo 3.1 se a matriz hessiana  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)$  não é definida positiva, aumenta-se sua diagonal principal. Isto é feito escolhendo um valor para  $\mu$  suficientemente grande e utilizando a parcela  $\mu \mathbf{I}$  de forma que a positividade da matriz resultante fique garantida, ou seja, até que todos os valores próprios da matriz resultante sejam maiores que zero. Computacionalmente pode-se escolher um valor para  $\mu$  e testar a decomposição de Cholesky, se esta não é aceita escolhe um valor maior que o anterior para  $\mu$  e repete-se o processo até que a decomposição de Cholesky seja aceita.

Nestas condições, até pela positividade estar garantida, possivelmente a condição (2.46), colocada no passo 5, será satisfeita, de qualquer forma deve-se testá-

la e se esta não vale, continua-se aumentando a diagonal principal da matriz hessiana, através do critério  $\mu = \text{máximo}\{2\mu, 10\}$ , até que a condição do ângulo seja satisfeita.

### 3.2.3.2 Método de Newton com região de confiança

O método de região de confiança estabelece uma maneira de globalizar o método de Newton. No método de região de confiança quando o minimizador do primeiro modelo quadrático é recusado opta-se por modificar o subproblema diminuindo seu domínio de atuação e a próxima tentativa é calculada solucionando um novo subproblema.

De forma contrária ao método de busca linear os algoritmos baseados em região de confiança se adaptam com bastante naturalidade a diversos problemas com restrições (MARTINEZ; SANTOS, 1995, p.126).

O algoritmo seguinte descreve o processo do método de região de confiança quando utilizado para globalizar o método de Newton.

#### **Algoritmo 3.2 (Região de Confiança)**

Dado  $\bar{\Delta} > 0, \Delta_0 \in (0, \bar{\Delta})$  e  $\eta \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$

Para  $k = 0, 1, 2, \dots$

1. Se  $\nabla f(\mathbf{x}^k) = \mathbf{0}$  parar. Senão obter  $\mathbf{s}_k$  solucionando (2.56)

2. Calcula-se  $\rho_k$  através da equação (2.62)

2.1 Se  $\rho_k < \frac{1}{4}$

Obtém-se um novo valor para a região de confiança através de

$$\Delta_{k+1} = \frac{1}{4} \|\Delta_k\|$$

e executa-se o passo 4. Caso contrário, ou seja, o passo 2.1 é contrariado, executa-se o passo 2.2.

2.2 Senão, caso  $\rho_k \geq \frac{1}{4}$  ( caso em que a condição 2.1 é contrariada), testa-se as seguintes situações

$$2.2.1 \text{ Se } \rho_k > \frac{3}{4} \text{ e } \|\mathbf{s}_k\| = \Delta_k$$

obtem-se um novo valor para a região de confiança calculando-se

$$\Delta_{k+1} = \min(2\Delta_k, \bar{\Delta})$$

e executa-se o passo 3. Caso 2.2.1 não ocorra executa-se o passo 2.2.2.

2.2.2 Senão, (caso em que a condição 2.2.1, é contrariada)

$$\Delta_{k+1} = \Delta_k$$

3. Se  $\rho_k > \eta$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{s}_k$$

e executa-se o passo 5. Se a condição 3 é contrariada executa-se o passo 4

4. Senão (caso a condição 3 não é verificada)

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k$$

e vai para o passo 5.

5. Volta-se em 1 e repete-se o processo até a convergência.

No Algoritmo 3.2 os passos 2.1 e 2.2 selecionam o tamanho da região de confiança enquanto os passo 3 e 4 definem o valor para  $\mathbf{x}$  que será utilizado na próxima iteração.

No algoritmo de região de confiança, espera-se no seu desenvolvimento que o subproblema seja satisfeito com a hessiana definida positiva e que a região de confiança seja, em toda iteração, relaxada.

Em linhas gerais o algoritmo de região de confiança verifica a compatibilidade da região em torno do ponto de desenvolvimento e o tamanho do passo que se está obtendo.

### 3.2.4 Método LP para um problema de valor próprio inverso

Em linhas gerais o método LP ( *lift* e *projection*) alterna pontos entre os conjuntos  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{A}$  ver equações 2.64 e 2.65 e ainda a figura 3.2.

Neste método nenhuma diferenciação de valores próprios é envolvida e este converge globalmente (CHEN e CHU, 1996, p. 2422). O método LP também pode ser usado quando valores próprios múltiplos, ou seja, um conjunto de valores próprios iguais é pretendido, o que o torna uma vantagem, visto que a expressão (3.14) não está definida quando isto ocorre.

Para cada  $\mathbf{c}^k \in \mathbb{R}^\ell$ , o método LP itera os dois passos seguintes:

1. (*Lift*). Encontrar o ponto  $\mathbf{Z}^k \in \mathbf{T}$  tal que  $\text{distância}[\mathbf{A}(\mathbf{c}^k), \mathbf{Z}^k] = \text{distância}[\mathbf{A}(\mathbf{c}^k), \mathbf{T}]$ .

O ponto  $\mathbf{Z}^k$  é uma *lift* (levantamento) de  $\mathbf{A}(\mathbf{c}^k)$  ortogonal à  $\mathbf{T}$ .

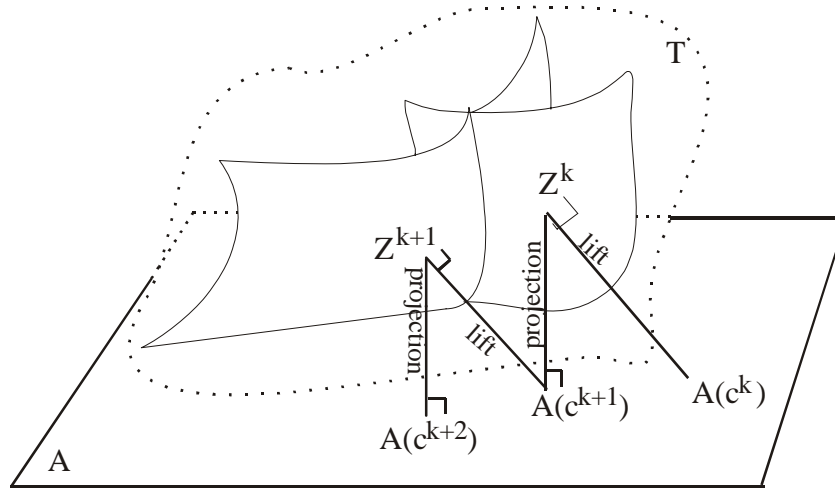
2.(*Projection*). Encontrar o ponto  $\mathbf{c}^{k+1} \in \mathbb{R}^\ell$  tal que  $\text{distância}[\mathbf{A}(\mathbf{c}^{k+1}), \mathbf{Z}^k] = \text{distância}[\mathbf{Z}^k, \mathbf{A}]$ . O ponto  $\mathbf{A}(\mathbf{c}^{k+1}) \in \mathbf{A}$  é chamado de

*projection* (projeção) de  $\mathbf{Z}^k$  ortogonal à  $\mathbf{A}$ .

A geometria dos passos 1 e 2 é observada na figura 3.2.



FIGURA 3.2-GEOMETRIA DO MÉTODO LP



A menor distância entre  $\mathbf{A}(\mathbf{c}^k)$  e  $\mathbf{T}$ , (*Lift*), é obtido no ponto

$$\mathbf{Z}^k = \mathbf{Q}(\mathbf{c}^k) \text{diag}\left(\Lambda_m^*, \Lambda_{\bar{\sigma}^k}(\mathbf{c}^k)\right) [\mathbf{Q}(\mathbf{c}^k)]^t. \quad (3.17)$$

onde as colunas da matriz ortogonal  $\mathbf{Q}(\mathbf{c}^k)$  são os vetores próprios de  $\mathbf{A}(\mathbf{c}^k)$  arranjados de tal forma que os elementos na matriz diagonal  $\mathbf{Q}(\mathbf{c}^k) \mathbf{A}(\mathbf{c}^k) [\mathbf{Q}(\mathbf{c}^k)]^t$  estejam na mesma ordem dos elementos da matriz  $\text{diag}\left(\Lambda_m^*, \Lambda_{\bar{\sigma}^k}(\mathbf{c}^k)\right)$ . A chamada permutação  $\sigma$  reflete a reordenação dos valores e vetores próprios de  $\mathbf{A}(\mathbf{c}^k)$  e  $\bar{\sigma}^k$  representa o conjunto complementar de  $\sigma^k$ . O exemplo a seguir ilustra esta situação.

### Exemplo 3.2

Dados,  $n = 3$  e  $m = 2$ , a matriz pré-estabelecida  $\Lambda_2^* = \text{diag}(7 \ 5)$ ,

$$\mathbf{A}(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^2 c_i \mathbf{A}_i \text{ de dimensão } 3 \times 3, \text{ com } \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$\mathbf{c} = [2 \ 1]^t$ . Nas condições acima,

$\mathbf{A}(\mathbf{c}) = \begin{bmatrix} 28 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$  apresenta os seguintes valores próprios  $\Lambda = \text{diag}(28 \ 20 \ 24)$ .

Comparando  $\Lambda = \text{diag}(28 \ 20 \ 24)$  e  $\Lambda_2^* = \text{diag}(7 \ 5)$  verifica-se que  $\Lambda_{\bar{\sigma}^k}(\mathbf{c}^k) = 28$ , pois de todas as combinações possíveis entre os elementos de  $\Lambda_2^*$  e  $\Lambda$ , as combinações  $(20, 5)$  e  $(24, 7)$  apresenta o menor valor, isto é,  $(20 - 5)^2 + (24 - 7)^2 = 514$ , seguindo (2.65).

O vetor  $\mathbf{c}^{k+1}$  que define a projeção de  $\mathbf{Z}^k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal à  $\mathbf{A}$  é obtido através da solução do sistema linear,

$$\sum_{i=1}^{\ell} \langle \mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j \rangle \mathbf{c}_i^{k+1} = \langle \mathbf{Z}^k, \mathbf{A}_j \rangle \quad j = 1, 2, \dots, \ell \quad (3.18)$$

onde  $\langle \mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j \rangle = \text{traço}(\mathbf{A}_i^t \mathbf{A}_j)$  é denominado produto interno de Frobenius para as matrizes  $\mathbf{A}_i$  e  $\mathbf{A}_j$ .

Escrevendo (3.18) explicitamente fica,

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_1 \rangle & \langle \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{A}_\ell, \mathbf{A}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \rangle & \langle \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{A}_\ell, \mathbf{A}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_\ell \rangle & \langle \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_\ell \rangle & \cdots & \langle \mathbf{A}_\ell, \mathbf{A}_\ell \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{k+1} \\ d_2^{k+1} \\ \vdots \\ d_\ell^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{Z}^k, \mathbf{A}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{Z}^k, \mathbf{A}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{Z}^k, \mathbf{A}_\ell \rangle \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Observa-se que a matriz dos coeficientes no sistema linear (3.19) é independente de  $k$ , isto é, independe dos valores obtidos em cada iteração significando que esta é fixa em todo processo iterativo.

Para o caso, particular, em que o espectro inteiro de uma matriz é pretendido o algoritmo LP é proposto da seguinte forma (CHEN;CHU, 1996, p. 2424) :

### Algoritmo 3.3 (Método LP)

Escolhe-se um vetor  $\mathbf{c}^0 \in \mathbb{R}^n$  arbitrário e para  $k = 0, 1, 2, \dots$  executa-se os seguintes passos

1. Forma-se  $\mathbf{A}(\mathbf{c}^k)$  e obtém-se a decomposição espectral  $\mathbf{Q}(\mathbf{c}^k)$  e  $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{c}^k)$

onde  $\mathbf{Q}(\mathbf{c}^k)$  matriz cujas colunas são vetores próprios e  $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{c}^k)$  matriz diagonal com valores próprios em sua diagonal principal obtidas no  $k$ -ésimo passo da iteração.

2. Forma-se a matriz  $\mathbf{Z}^k$  dada por

$$\mathbf{Z}^k = \mathbf{Q}(\mathbf{c}^k) \text{diag}(\mathbf{\Lambda}_m^*) \mathbf{Q}^t(\mathbf{c}^k)$$

onde  $\mathbf{\Lambda}_m^*$  é o vetor cujas  $m$  componentes são os valores próprios pretendidos.

3. Obtém-se  $\mathbf{c}^{k+1}$  resolvendo o sistema linear

$$\sum_{i=1}^n \langle \mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j \rangle \mathbf{c}_i^{k+1} = \langle \mathbf{Z}^k, \mathbf{A}_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

4. Parar se  $\|\mathbf{c}^{k+1} - \mathbf{c}^k\| < \varepsilon$  com  $\varepsilon$  como critério de parada pretendido.

### 3.3 ALGORITMO DE LAGRANGEANO AUMENTADO

O algoritmo de Lagrangeano Aumentado aplicado à problemas do tipo (2.69) com penalidades pertencentes à família  $P$ , gera seqüências  $\mathbf{x}^k$  e  $\mu^k$ , a partir de  $\mu^0 > 0$  fixo e  $\{\mathbf{r}^k\}$  uma seqüência de termos positivos e limitada. Este pode ser implementado fazendo-se uso tanto da penalidade **tipo 1** quanto **tipo 2** para solucionar problemas com restrições.

O algoritmo de Lagrangeano Aumentado descrito a seguir está apresentado em MATIOLI (2001) com uma modificação na obtenção do valor da grandeza  $r$ .

**Algoritmo 3.4 (Lagrangeano Aumentado Implementado)**

Dados  $\mu^k > 0$ ,  $r^k > 0$   $\mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$   $\gamma \in (0,1)$  ( $\gamma = 0,2$ )

$k = 0$

repetir

1. encontrar

$$\mathbf{x}^{k+1} \text{ minimizador de } \left\{ f(\mathbf{x}^k) + r^k \sum_{i=1}^m p\left(\frac{c_i(\mathbf{x}^k)}{r^k}, \mu_i^k\right) \right\}$$

2. calcular

$$\mu_i^{k+1} = p'\left(\frac{c_i(\mathbf{x}^{k+1})}{r^k}, \mu_i^k\right) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

3. redução de  $r$

$$c^k = \max_i \left\{ \mu_i^{k+1} c_i(\mathbf{x}^{k+1}) \right\}$$

$$\text{se } c^k > \gamma c^{k-1} \text{ fazer } r^{k+1} = \frac{r^k}{4}$$

$$\text{senão, } r^{k+1} = r^k$$

fazer  $k = k + 1$  e voltar ao passo 1.

Para reduzir  $r$  usou-se como critério a complementaridade, definindo

$$c^k = \max_i \left\{ \mu_i^{k+1} c_i(\mathbf{x}^{k+1}) \right\}$$

ao final de cada iteração do método de Lagrangeano Aumentado, utiliza-se o seguinte procedimento a partir de  $k = 2$ :

$$\text{se } \frac{c^k}{c^{k+1}} > \gamma \text{ fazer } r^{k+1} = \frac{r^k}{4}$$

onde  $\gamma \in (0,1)$ , por exemplo,  $\gamma = 0,2$ .

Desta forma força-se o pior elemento de  $\mu^k c(x^k)$  a melhorar ao menos 80% por iteração.

A função  $\theta$  a ser utilizada no algoritmo de Lagrangeano Aumentado 4.4 é dada por

$$y \in \mathbb{R} \rightarrow \theta(y) = \begin{cases} -\log(1-y) & \text{se } y \leq \frac{1}{2} \\ 2y^2 + \log(2) - \frac{1}{2} & \text{se } y > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.20)$$

que é uma função da família P (MATIOLI, 2001, p. 39) logo não gera multiplicadores de Lagrange negativos, situação imposta nas condições de Karush-Kuhn-Tucker (seção 2.1.6.1).

Na relação (3.20)  $y$  deve ser entendido como o valor funcional de cada restrição.

Se for escolhida a penalidade **tipo 1** para formar a função Lagrangeano Aumentado que será usada no passo 1 do algoritmo 3.4 tem-se para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$$p\left(\frac{c_i(\mathbf{x})}{\bar{r}}, \mu_i\right) = \theta\left(\mu_i \frac{c_i(\mathbf{x})}{\bar{r}}\right) = \begin{cases} -\log\left(1 - \mu_i \frac{c_i(\mathbf{x})}{\bar{r}}\right) & \text{se } \mu_i \frac{c_i(\mathbf{x})}{\bar{r}} \leq \frac{1}{2} \\ 2\left(\mu_i \frac{c_i(\mathbf{x})}{\bar{r}}\right)^2 + \log(2) - \frac{1}{2} & \text{se } \mu_i \frac{c_i(\mathbf{x})}{\bar{r}} > \frac{1}{2} \end{cases}$$

No caso em que é escolhida a penalidade do **tipo 2** para formar a função Lagrangeano aumentado tem-se

$$p\left(\frac{c_i(\mathbf{x})}{\bar{r}}, \mu_i\right) = \mu_i \theta\left(\frac{c_i(\mathbf{x})}{\bar{r}}\right) = \begin{cases} -\mu_i \log\left(1 - \frac{c_i(\mathbf{x})}{\bar{r}}\right) & \text{se } \frac{c_i(\mathbf{x})}{\bar{r}} \leq \frac{1}{2} \\ \mu_i \left(2\left(\frac{c_i(\mathbf{x})}{\bar{r}}\right)^2 + \log(2) - \frac{1}{2}\right) & \text{se } \frac{c_i(\mathbf{x})}{\bar{r}} > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Em ambas as situações  $i = 1, 2, \dots, m$ , sendo  $m$  o número de restrições.

No passo 2 do algoritmo 3.4, que atualiza os multiplicadores de lagrange, devem ser calculadas as derivadas primeiras da penalidade **tipo 1** ou **tipo 2** que se está usando para desenvolver o método

A tomada de decisão sobre os valores próprios que devem ser estabelecidos em um processo de otimização é uma tarefa importante. Desta forma algumas ferramentas podem ser úteis para auxiliar na decisão correta, como os critérios de otimalidade para redes geodésicas e o teste para igualdade de um conjunto dos valores próprios de uma matriz de covariâncias.

### 3.4 CRITÉRIOS DE OTIMALIDADE PARA REDES GEODÉSICAS

Em geral, os critérios de otimalidade para precisão são descritos pelas medidas de precisão usadas para descrever a qualidade da rede. Na fase de planejamento da rede geodésica é possível avaliar o tamanho e a forma do elipsóide de confiança, visto que estas grandezas são dependentes apenas dos valores próprios e vetores próprios da matriz  $\mathbf{Q}_x$  (PELZER, 1980, p. 57) .

No caso onde os requerimentos de precisão não são facilmente definidos, alguns conceitos de rede ideal são propostos.

Alguns dos mais importantes critérios de otimalidade e exigências para a rede geodésica (DUPRAZ; NIEMEIER, 1981, p. 387-389; WELSH et al., 2000, p.133-134; KUANG, 1996, p.206) são (onde nas equações (3.21) a (3.25) o símbolo  $!$  indica: deve ser) :

Critério de otimalidade D

$$\prod_{i=1}^p \lambda_i = \det(\mathbf{Q}_x) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_p \stackrel{!}{=} \text{mín.} \quad (3.21)$$

é a medida denominada variância generalizada que deve ser mínima e utilizada quando os valores próprios são diferentes de zero;

Critério de otimalidade A

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i = \text{tr}(\mathbf{Q}_x) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = \text{mín.} \quad (3.22)$$

é a medida denominada variância total e deve ser mínima utilizada em substituição à (3.21) isto é no caso em que algum valor próprio seja zero;

Critério de otimalidade E

$$\lambda_{\max} = \text{mín.} \quad (3.23)$$

significa que o quadrado do semi-eixo maior da elipse de erros deve ser mínimo, indicando que a precisão de uma rede será tanto mais alta quanto menor for o valor próprio máximo da matriz de covariância do vetor dos parâmetros estimados  $\hat{\mathbf{x}}$ ;

Condição de Isotropia

$$\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = 1 \quad (3.24)$$

na qual a medida da precisão do ponto é a mesma em todas as direções;

Critério de otimalidade S

$$\lambda_{\max} - \lambda_{\min} = \text{mín.} \quad (3.25)$$

é a condição de homogeneidade, ou seja, as elipses se aproximam de uma circunferência.

### 3.5 TESTE PARA A IGUALDADE DE VALORES PRÓPRIOS

A fim de verificar, se sob um nível de significância  $\alpha$ , existe um conjunto de  $p$  valores próprios iguais entre si utiliza-se o teste da igualdade de valores próprios. Este procedimento conduz a verificação se os elementos de um conjunto de valores próprios são significativamente distintos ou iguais entre si. Considerando o conjunto

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p$ , o teste pode ser aplicado para qualquer subconjunto consecutivo de valores próprios. Se um subconjunto de  $b$  valores próprios é dado,  $\lambda_{k+1} \leq \lambda_{k+2} \leq \dots \leq \lambda_{k+b}$ , a hipótese nula é (JACKSON, 1991, p.86-87):

$$\mathbf{H}_0 : \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_{k+b}$$

Para esta hipótese, a estatística a ser calculada é,

$$r \left[ - \sum_{j=k+1}^{k+b} \ln(\lambda_j) + b \ln \left( \sum_{j=k+1}^{k+b} \frac{\lambda_j}{b} \right) \right] \sim \chi^2, \quad (3.26)$$

onde  $r$  denota o número de graus de liberdade associado com a matriz de covariâncias e a distribuição  $\chi^2$  tem  $(b-1)(b+2)/2$  graus de liberdade. Fixado o nível de significância  $\alpha$ , se a estatística calculada for maior que a estatística  $\chi^2_{(b-1)(b+2)/2}$ , rejeita-se a hipótese nula.

Para o caso em que  $p=2$ , caso bivariado, o teste da igualdade dos valores próprios sob a hipótese nula é:

$$\mathbf{H}_0 : \lambda_1 = \lambda_2$$

e para esta hipótese, a estatística a ser calculada é,

$$F^* = \frac{(n-2)(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{8\lambda_1\lambda_2} \quad (3.27)$$

Na relação (3.27) a estatística  $F^*$  a ser testada tem distribuição F central com número de graus de liberdade no numerador igual a 2 e o número de graus de liberdade no denominador  $n-2$ , ou seja,  $F^* \sim F_{2, n-2}$  e  $n$  é o número de observações.

Este teste permite formular hipóteses sobre uma rede geodésica, como exemplo, pode ser feita a inferência se uma rede é homogênea, ou não, sob um nível de significância e complementa os critérios de otimalidade para um rede geodésica. Para o caso de planejamento de redes o teste pode ser utilizado antes mesmo de qualquer medição em campo, ou seja, pode ser aplicado ao conjunto de valores próprios pré-estabelecidos que serão utilizados no processo de otimização.



Visto que  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{Q}_x$  apresentam valores próprios recíprocos entre si, vale com respeito ao valor próprio  $\lambda_i$  de  $\mathbf{N}$  e  $\mu_i$  de  $\mathbf{Q}_x$  a relação

$$\lambda_i = \frac{1}{\mu_i} \quad \text{com } \mu_i \neq 0 \text{ e } i = 1, 2, \dots, u \quad (3.28)$$

onde  $u$  é o número de parâmetros.

Com isso há a possibilidade de ser formulada a otimização relativa à matriz das equações normais  $\mathbf{N}$ . Com base em (3.28) verifica-se que um aumento no valor próprio  $\lambda_i$  de  $\mathbf{N}$  corresponde a um decréscimo no valor próprio  $\mu_i$  de  $\mathbf{Q}_x$ , ou seja, para  $\mu_i$  tendendo para seu valor máximo tem-se  $\lambda_i$  tendendo para seu valor mínimo. Todo o processo aplicado para a obtenção dos valores próprios pretendidos é efetuado sobre a matriz dos coeficientes das equações normais. Então, definido o valor limite para a precisão dos parâmetros  $\mu_{\max}$  obtém-se os valores próprios para a matriz  $\mathbf{N}$  através da relação (3.28).

### 3.6 RESTRIÇÕES AOS PESOS BASEADA EM CRITÉRIOS DE CONFIABILIDADE

A sensibilidade de uma rede geodésica frente a um erro grosseiro pode ser caracterizada ainda na fase de planejamento de forma a contemplar a magnitude do menor erro que pode ser detectado (confiabilidade interna) ou o efeito dos erros não detectáveis pelo teste nas grandezas estimadas na rede (confiabilidade externa).

Uma medida para a confiabilidade interna de uma observação é o valor limite relativo obtida a partir da equação (2.99):

$$\frac{\nabla l_i}{\sigma_{\ell_i}} = \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \quad (3.29)$$

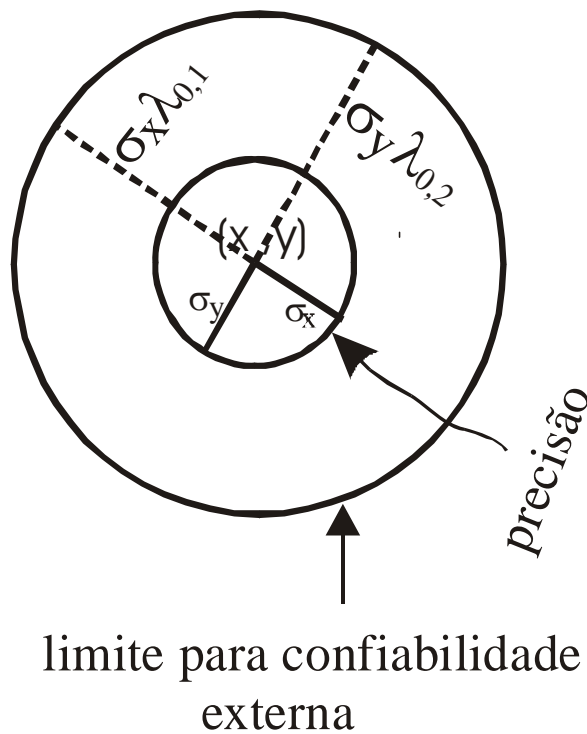
Uma medida para a confiabilidade externa é dada pela relação (BAARDA,1977, p. 431;MÜLLER, 1986, p.158 ):

$$\nabla_{0,i} \mathbf{f} \leq \delta_x \sigma_f \quad (3.30)$$

onde  $\nabla_{0,i} \mathbf{f}$  é o valor limite para a influência de um erro grosseiro não detectável presente na observação  $\ell_i$  sobre uma função qualquer  $\mathbf{f}$  e  $\sigma_f$  é o desvio padrão relacionado à função  $\mathbf{f}$ .

Interpreta-se geometricamente a equação (3.30) com o auxílio da relação (2.109) conforme a figura 3.3

FIGURA 3.3- PRECISÃO E CONFIABILIDADE



Na figura 3.3 está representada a influência de um erro grosseiro na determinação dos parâmetros para o caso de um ponto em uma rede bi-dimensional considerando a elipse degenerada em um círculo de erros. A grandeza  $\lambda_{0,i} = \delta_x$  é o multiplicador do raio do círculo de erros definindo o limite para a “distorção” do ponto estimado sobre a influência de um erro na observação.

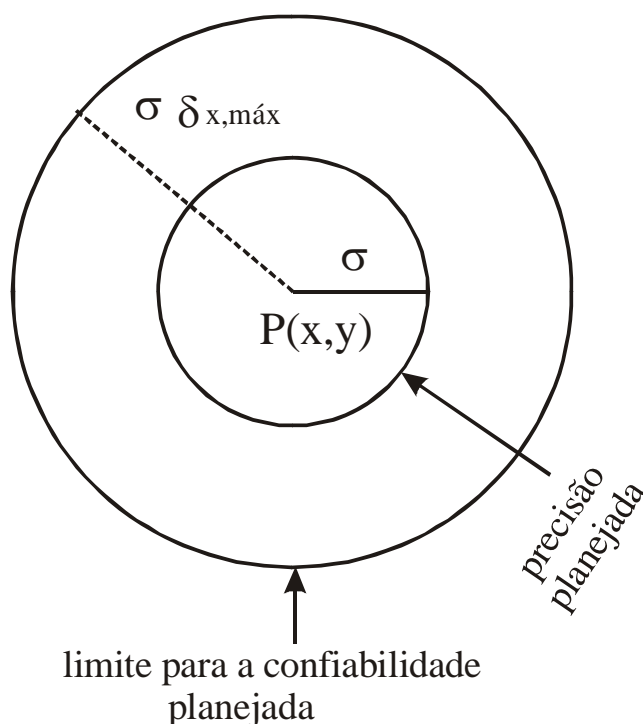
O valor limite relativo obtido da equação (3.30) considerando-se a equação (2.109) é escrito como,

$$\frac{\nabla_{0,i} \mathbf{f}}{\sigma_f} \leq \delta_0 \sqrt{\frac{1-r_i}{r_i}} \quad (3.31)$$

Nas equações (3.29) e (3.31) estão apresentadas a contribuição da redundância de cada observação na confiabilidade interna e externa de uma rede geodésica. Desta forma  $r_i$  apresenta-se como grandeza de referência no processo de otimização dos pesos, quando o objetivo está em planejar uma rede que atenda a critérios de confiabilidade.

Na isotropia, enquanto objetivo ideal em um processo de otimização dos pesos, o círculo de erros coincide com a elipse de erros. Assim sendo, pode-se estabelecer a otimização da precisão e da confiabilidade integrando-se os critérios para otimilidade de uma rede geodésica (seção 3.4) e a equação (2.103) representado geometricamente na figura 3.4

FIGURA 3.4 - PRECISÃO E CONFIABILIDADE EM PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO



O limite superior  $\delta_{x,m\acute{a}x}$  quando utilizado como critério de confiabilidade é tomado como multiplicador de  $\sigma = \sqrt{\lambda}$  onde  $\lambda$  é o valor próprio pretendido para a rede. Neste caso o raio da hiper-esfera de erros, que é a postulação ideal no critério de precisão, fica multiplicado por  $\delta_{x,m\acute{a}x}$ . Na figura 3.4 o círculo ampliado com o valor  $\delta_{x,m\acute{a}x}$  descreve a falsificação (ou distorção) máxima da posição de um ponto  $P(x, y)$  causado pelo erro limite  $\nabla l_i$  na observação.

A partir das equações (3.29) e (3.31) uma redundância mínima pode ser determinada conforme especificação de uma controlabilidade mínima (interna ou externa).

No caso de especificar-se um valor  $k_I = \text{constante}$  para a controlabilidade mínima interna tem-se para a controlabilidade interna relativa,

$$\frac{\nabla l_i}{\sigma_{\ell_i}} \leq k_I \quad (3.32)$$

comparando a relação (3.32) com a equação (3.29) obtém-se

$$\frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \leq k_I \quad (3.33)$$

elevando ambos os membros ao quadrado e isolando  $r_i$  consegue-se o valor mínimo que a redundância deve apresentar para que seja satisfeito o valor pré-estabelecido  $k_I$  para a controlabilidade interna, ou seja,

$$r_{i,I} \geq \frac{\delta_0^2}{k_I^2} \quad (3.34)$$

onde  $r_{i,I}$  significa a  $i$ -ésima redundância mínima baseada em uma especificação de controlabilidade interna.

Se for planejado um valor para a controlabilidade interna então o valor mínimo para a redundância de cada observação será,

$$r_{i,I,\min} = \left( \frac{\delta_0}{k_I} \right)^2 \quad (3.35)$$

valor este que toda observação da rede deverá satisfazer.

Para o caso de especificar-se um valor  $k_E = \text{constante}$  para a controlabilidade externa tem-se para a controlabilidade externa relativa a desigualdade

$$\frac{\nabla_{o,i} \mathbf{f}}{\sigma_f} \leq k_E \quad (3.36)$$

e comparando a relação (3.36) acima com a equação (3.31) escreve-se

$$\delta_0 \sqrt{\frac{1-r_i}{r_i}} \leq k_E \quad (3.37)$$

elevando ambos os membros ao quadrado e multiplicando-os por  $r_i$

$$\delta_0^2 - \delta_0^2 r_i \leq k_E^2 r_i \quad (3.38)$$

com isso consegue-se o valor mínimo que  $r_i$  deve apresentar para que a redundância da observação satisfaça o valor pré-estabelecido  $k_E$  para a controlabilidade externa que é,

$$r_{i,E} \geq \frac{\delta_0^2}{\delta_0^2 + k_E^2} \quad (3.39)$$

onde  $r_{i,E}$  significa a  $i$ -ésima redundância mínima baseada em uma especificação de controlabilidade externa.

Se é pretendido que a rede apresente um valor máximo para a confiabilidade externa geral ou um valor máximo para a distorção da rede,  $\delta_{x,\text{máx}}$ , como na figura

3.5 então pode-se planejar um valor mínimo para a redundância que cada observação deverá satisfazer após o ajustamento da rede. Observando as equações (3.37), (3.31) e (3.30) pode-se especificar,

$$k_E = \delta_{x,máx} \quad (3.40)$$

e com isso a relação (3.39) é escrita como

$$r_{i,E} \geq \frac{\delta_0^2}{\delta_0^2 + \delta_{x,máx}^2}. \quad (3.41)$$

A relação (3.41) explicita o valor mínimo para a redundância que cada observação planejada da rede deve apresentar,

$$r_{i,E,min} = \frac{\delta_0^2}{\delta_0^2 + \delta_{x,máx}^2} \quad (3.42)$$

a qual toda observação deve satisfazer.

Ambas as condições (3.42) e (3.35) se apresentam como grandezas para construção das restrições aos pesos em um processo de otimização dos pesos com base em critérios de confiabilidade.

O princípio fundamental está em que qualquer redundância parcial deve ser maior ou igual a redundância mínima pré-estabelecida pela controlabilidade interna ou externa pretendida, isto é,

$$r_i \geq (r_{i,E,min} \text{ ou } r_{i,I,min}). \quad (3.43)$$

A partir disto considerando a equação (2.78) tem-se a restrição para a controlabilidade interna,

$$r_{i,I,min} \leq 1 - p_i q_{\hat{\ell}_i} \quad (3.44)$$

desta forma deduz-se a restrição a cada peso para a observação em um processo de otimização dos pesos das observações geodésicas ,

$$p_i \leq \frac{1 - r_{i,I,min}}{q_{\hat{\ell}_i}}. \quad (3.45)$$

De forma similar deduz-se restrições aos pesos considerando a confiabilidade externa,

$$p_i \leq \frac{1 - r_{i,E,\min}}{q_{\ell_i}} \quad (3.46)$$

onde  $q_{\ell_i}$  é dada pela relação (2.80).

Com estas considerações redundâncias mínimas podem ser consideradas em um processo de otimização de forma que os pesos, em um planejamento de rede geodésica, venham a atender especificações de precisão e confiabilidade.

Nesta concepção pode-se considerar um valor para  $\delta_{x,\max}$  ou então pré-estabelecer um valor mínimo para a redundância que se quer obter para cada observação.

Para PELZER (1985 apud ZHENGLU ZHANG; XIAODONG LI, 1990, p. 252) um valor aceitável para confiabilidade interna pode ser

$$\nabla_0 l_i = (6,8) \sigma_{\ell_i} \quad (3.47)$$

e para a confiabilidade externa,

$$\delta_{x,\max} = (8,10). \quad (3.48)$$

O primeiro critério significa que o menor erro grosseiro que pode ser detectado na observação é de 6 a 8 vezes o desvio padrão da observação. O segundo critério explicita que o fator a ser usado para estimar a confiabilidade externa está entre 8 e 10 e não é dependente da observação sendo uma vantagem em situações de planejamento quando a precisão da observação não é conhecida.

### 3.7 OTIMIZAÇÃO ESPECTRAL

A otimização dos pesos com base em um problema de valor próprio inverso tem seu uso ampliado quando garantias de solubilidade são estabelecidas e ainda quando

são consideradas restrições tanto na precisão dos equipamentos disponíveis quanto na confiabilidade interna ou externa da rede que garantem uma controlabilidade mínima frente a erros grosseiros para cada observação.

A função de otimização dos pesos baseada em um problema de valor próprio inverso a ser considerada é dada por

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{p})^t \mathbf{F}(\mathbf{p}) \quad (3.49)$$

onde  $\mathbf{p} = \text{diag}(\mathbf{P})$  e  $\mathbf{F}(\mathbf{p})$  é dado como na (3.10).

Neste ponto considera-se a otimização dos pesos irrestrita no caso em que não se tem nenhuma restrição sobre os pesos e desta forma uma solução qualquer é pretendida, então o problema a ser considerado é do tipo,

*Problema P1*

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{p})^t \mathbf{F}(\mathbf{p}) \quad (3.50)$$

Neste caso, qualquer método de minimização irrestrita pode ser aplicado ao problema e em especial o método LP como estabelecido no item 3.2.4.

Outra possibilidade ocorre quando alguma restrição de equipamento é imposta à solução do problema. Devem-se obter posições precisas (precisão pré-definida), mas com os equipamentos disponíveis. Tem-se com isso uma restrição natural ao problema quanto ao equipamento a ser utilizado no levantamento geodésico. Considera-se, portanto que nenhum peso pode ser maior que algum valor fixado previamente. Então o problema (3.50) deve ser solucionado com alguma restrição sobre suas variáveis. Formula-se o problema com restrição como

*Problema P2*

$$\text{minimizar } f(\mathbf{p}) \quad (3.51)$$

$$\text{sujeito a } p_i \leq c \quad i = 1, 2, \dots, n$$

que concordando com (2.67) fica

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(\mathbf{p}) \\ &\text{sujeito a } p_i - c \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.52)$$



onde  $c = \frac{1}{\sigma_i^2}$  e  $\sigma_i$ , sendo fixo, é a melhor precisão entre os instrumentos disponíveis

para o levantamento.

Em correspondência à formulação estabelecida no problema P2, restrições aos pesos podem ser consideradas no processo de otimização tendo em vista os critérios de confiabilidades. Pode-se pretender para um planejamento, observações que apresentem uma determinada probabilidade quanto à erros grosseiros representado pelo número de redundância  $r_i$  da quantidade observada. Neste caso são introduzidos limites para os quais nenhum peso deve ultrapassar.

Os objetivos: precisão para os parâmetros e confiabilidade para a observação, apresentam um conflito entre seus objetivos. Assim pode ter para uma observação um peso relativamente grande e em contrapartida uma redundância pequena e desta forma a observação será precisa, porém com controlabilidade reduzida quanto à erros grosseiros. Assim o algoritmo para otimização dos pesos com critério de confiabilidade pode apresentar solução somente para a confiabilidade ou para confiabilidade e precisão visto que nem sempre os dois objetivos simultaneamente podem ser cumpridos.

O modo de proceder quanto a uma otimização com restrições de confiabilidade consiste em indicar medidas de confiabilidade interna ou externa concordando com as considerações apresentadas no item 3.6 Outro modo de proceder é indicar uma redundância mínima a partir da qual toda observação da rede deve atender.

É pretendido, por exemplo, relativo a à confiabilidade externa um valor  $\bar{\delta}_{x,\max}$  a partir do qual nenhuma observação pode transcender, desta forma resulta a partir da equação (3.39) uma redundância mínima para cada observação que considerando as desigualdades estabelecidas pela equação (3.45) restrições aos pesos podem ser estabelecidas e ainda exigir-se condições de não negatividade  $p_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , isto conduz a desigualdades do tipo  $-p_i \leq 0$  em concordância com o problema (2.69).

Desta forma se exigências de controlabilidade e de positividade são estabelecidas o problema é colocado como,

*Problema P3*

minimizar  $f(\mathbf{p})$

$$\text{sujeito a } p_i \leq \frac{1-r_{E,\min}}{q_{\hat{\ell}_i}} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{restrições de confiabilidade}) \quad (3.53)$$

$$p_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{restrições de não negatividade})$$

concordando com o problema (2.67) reformula-se o problema P3

minimizar  $f(\mathbf{p})$

$$\text{sujeito a } p_i - \frac{1-r_{E,\min}}{q_{\hat{\ell}_i}} \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{restrições de confiabilidade}) \quad (3.54)$$

$$-p_i \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{restrições de não negatividade}) .$$

O problema P3 pode ser escrito na forma generalizada fazendo-se as seguintes considerações:

$$\text{Forma-se o vetor das restrições } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{1-r_{E,\min}}{q_{\hat{\ell}_1}} & \dots & \frac{1-r_{E,\min}}{q_{\hat{\ell}_n}} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

sendo a dimensão de  $\mathbf{r}$   $2n \times 1$ , considera-se a matriz de coeficientes  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$  e o

vetor  $\mathbf{p} = [p_1 \quad \dots \quad p_n \quad p_1 \quad \dots \quad p_n]$  desta forma tem-se o problema P3

minimizar  $f(\mathbf{p})$

$$\text{sujeito a } \mathbf{Cp} \leq \mathbf{r} \quad (3.55)$$

que escrito na forma do problema (2.69) fica

*Problema P4*

minimizar  $f(\mathbf{p})$

$$\text{sujeito a } \mathbf{Cp} - \mathbf{r} \leq \mathbf{0} \quad (3.56)$$

A solução do problema P4 pode ser obtido por qualquer método que considere restrição em sua formulação e em particular o método de Lagrangeano Aumentado como descrito na seção 3.3.

## 4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados experimentos para redes geodésicas bidimensionais aplicando-se a metodologia proposta para os algoritmos de otimização irrestrita e restrita.

### 4.1 EXPERIMENTOS SOBRE OTIMIZAÇÃO IRRESTRITA

Nos experimentos seguintes são apresentados resultados sobre o uso dos algoritmos de otimização descritos. Os algoritmos utilizados são: método de Newton com as estratégias de busca linear e região de confiança e o método LP (*lift and projection*). Os métodos globalizados são utilizados para possibilitar melhorar as garantias quanto à solução da otimização dos pesos em observações geodésicas. O método de Newton clássico já aplicado em OLIVEIRA (2003) apesar de se apresentar como uma alternativa para a solução dos problemas de otimização de redes geodésicas quando se faz uso de um problema de valor próprio inverso, não traz garantias quanto à solução do sistema linear e como consequência poderia se concluir, falsamente, que uma determinada rede geodésica não poderia ser otimizada como se pretende.

Nas condições acima os métodos globalizados se apresentam como uma ferramenta complementar na otimização de redes geodésicas e ainda a variedade desses métodos possibilitam melhorar as chances de se encontrar os pesos, os quais permitem que a rede possa ser melhor projetada.

Os testes são simulações para redes geodésicas bidimensionais e ilustram a aplicação dos algoritmos de otimização. O valor próprio máximo pré-definido para a matriz de covariâncias, em cada exemplo, representa uma variância limite, e em consequência um desvio-padrão limite para qualquer parâmetro estimado a partir da rede.

A partir do valor limite para a variância são estabelecidos os outros valores próprios que formarão o espectro a ser objetivado na solução do problema de valor

próprio inverso. Em cada exemplo aplicou-se o teste de igualdade de valores próprios a fim de verificar se a rede que se está simulando terá características de homogeneidade e isotropismo, ou seja, verifica-se se as condições (3.24) e (3.25) são aceitáveis sob um nível de significância estabelecido.

Foram realizados três experimentos variando-se o número de valores próprios a determinar em cada um deles. Em cada experimento foram aplicados os três métodos globalizados descritos, ou seja, no mesmo projeto de rede foi verificada a solução com cada um dos algoritmos.

Com a pluralidade de soluções (uma para cada método) utilizou-se como critério inicial para comparar as soluções dos métodos globalizados para um projeto

de rede geodésica o critério de custo  $\sum_{j=1}^n p_j = \text{mín.}$ , ou seja, define-se aqui como

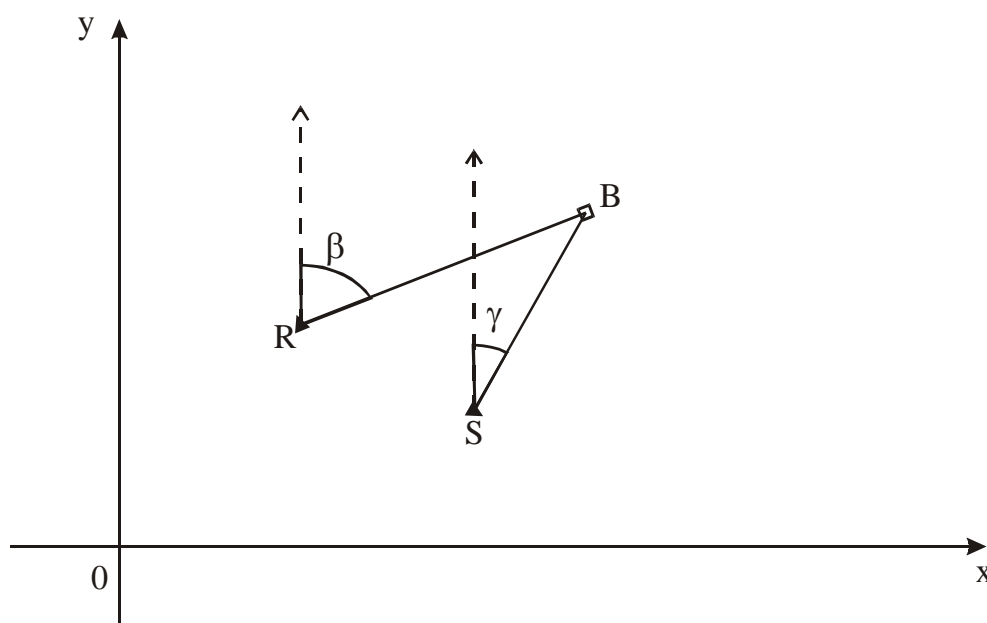
melhor solução aquela que apresenta menor soma dos pesos positivos. Os pesos negativos são retirados do somatório, ou seja, cada peso negativo é considerado no somatório como  $p = 0$  pelo fato que num processo de otimização o peso negativo indica que a observação não coopera para a precisão final da rede, ou ainda que esta observação pode ser feita com qualquer instrumento que a precisão final da rede não será menor que aquela pretendida no processo de otimização. Inicialmente este critério se justifica pelo fato que quanto menor o somatório dos pesos menor será o valor de cada peso em média informando que a precisão para a observação pode ser menos rigorosa, contribuindo para uma variedade maior de instrumentos que podem ser escolhidos para o levantamento.

Todos os algoritmos foram inicializados utilizando como matriz dos pesos iniciais a matriz identidade e como critério de parada para o método de Newton tanto com busca linear quanto com região de confiança  $\nabla f < 10^{-9}$ . Para o método LP o critério de parada utilizado foi  $\|\mathbf{p}^{k+1} - \mathbf{p}^k\| < 10^{-9}$ . A seguir são apresentados os três experimentos.

### 4.1.1 Experimento 1

Neste experimento estuda-se a obtenção dos pesos das observações geodésicas utilizando o método de Newton com estratégias de busca linear e região de confiança e ainda o método LP. O problema de valor próprio inverso será aplicado ao projeto de planejar o ajustamento das coordenadas cartesianas de um ponto a partir de quatro observações como representado na figura 4.1.

FIGURA 4.1 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO PLANEJAMENTO DE UM PONTO EM COORDENADAS CARTESIANAS



A representação geométrica do planejamento como apresentada na figura 4.1, estabelece que as observações planejadas serão constituídas de duas observações de distância e duas de direção.

As coordenadas do ponto  $B(x_b, y_b)$  são designadas como parâmetros e devem ser estimadas com uma precisão pré-definida estabelecida previamente por meio dos valores próprios da matriz de covariâncias dos parâmetros estimados, matriz essa obtida pela relação  $\mathbf{Q}_x = \mathbf{N}^+ = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+$ .

Para efetivação do projeto são conhecidos:

- 6) As coordenadas conhecidas dos pontos R e S e as coordenadas aproximadas do ponto B apresentados no quadro 4.1.

QUADRO 4.1 – COORDENADAS HORIZONTAIS I

Ponto	Coordenadas	
	x (m)	y (m)
R	200	500
S	400	300
Ponto	Coordenadas aproximadas	
B	600	582

- 2) O modelo funcional das quatro observações apresentadas em:

duas observações de distância:

$$d_1 = \sqrt{(x_b - 200)^2 + (y_b - 500)^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x_b - 400)^2 + (y_b - 300)^2}$$

duas observações de direção:

$$\beta = \arctan\left(\frac{x_b - 200}{y_b - 500}\right)$$

$$\gamma = \arctan\left(\frac{x_b - 400}{y_b - 300}\right)$$

- 3) A matriz de planejamento **A** é obtida das derivadas parciais das equações de observação, avaliadas nas coordenadas aproximadas do ponto B. Para a rede representada pela figura 4.1 é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,97963 & 0,20082 \\ 0,57850 & 0,81568 \\ 0,00049 & -0,00240 \\ 0,00236 & -0,00167 \end{bmatrix}.$$

Apresentando quatro linhas (número de observações) e duas colunas (número de parâmetros).

4) Valores próprios pré-estabelecidos para a matriz de covariâncias são:

$$\mu_1 = \frac{1}{15000} \text{ m}^2 \text{ e } \mu_2 = \frac{1}{20000} \text{ m}^2.$$

Desta forma o valor limite para a variância de qualquer parâmetro estimado nesta rede é de  $\frac{1}{15000} \text{ m}^2 \cong 0,0000666 \text{ m}^2$ , que é o valor próprio máximo estabelecido para a matriz de covariâncias.

5) Aplicação do teste de igualdade dos valores próprios.

Para este caso, que é o caso bivariado, aplicou-se tanto a estatística dada em (3.26) como a dada em (3.27) e ambas com um nível de significância para o teste de 5%. Os dois testes forneceram a mesma conclusão, ou seja, indicaram que a hipótese da rede projetada ser homogênea e isotrópica não deve ser rejeitada, isto com um nível de confiança de 95% para o teste.

6) Os valores próprios utilizados no processo de otimização estabelecido pela equação (3.28) são

$$\lambda_1^* = 20000 \text{ e } \lambda_2^* = 15000.$$

A matriz  $\mathbf{P}$  é uma matriz diagonal cujos elementos na diagonal principal são tomados como incógnitas.

## PROBLEMA 1

O problema é enunciado como: quais pesos ( ou qual matriz de pesos) deve ser atribuído às observações para que a matriz dos coeficientes das equações normais (matriz  $\mathbf{N}$ ) apresente os valores próprios  $\lambda_1 = 20000$  e  $\lambda_2 = 15000$ ?

A matriz  $\mathbf{N}$  é escrita como,



$$\mathbf{N} = \sum_{j=1}^4 \left( p_j \mathbf{a}_j^t \mathbf{a}_j \right)$$

onde  $p_j = p_{jj}$  é cada elemento da diagonal principal da matriz  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{a}_j$  é a  $j$ -ésima linha da matriz  $\mathbf{A}$ .

O sistema de equações não-lineares a ser solucionado, de forma irrestrita, pelas técnicas citadas anteriormente é dado por,

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{p}) - 20000 \\ \lambda_2(\mathbf{p}) - 15000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para solucionar o problema anterior faz-se uso dos métodos de Newton com estratégias de busca linear e região de confiança e o Método LP.

Os resultados estão colocados no quadro 4.2:

QUADRO 4.2- RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO: BUSCA LINEAR, REGIÃO DE CONFIANÇA E LP.

Método	Pesos
LP	8201,23996
	12720,97180
	796778022,61755
	1111425479,72264
Newton com busca linear	15784,03949
	5138,17227
	2061012691,53421
	205098948,64417
Newton com região de confiança	15784,03949
	5138,17227
	2061012691,53421
	205098948,64417

Os valores próprios calculados com a matriz planejamento **A** e os pesos obtidos por cada método estão expostos no quadro 4.3

QUADRO 4.3- VALORES PRÓPRIOS: EXPERIMENTO 1

	<b>Método LP</b>	<b>Newton com busca linear</b>	<b>Newton com região de confiança</b>
$\lambda_1$	20008,3654504157	20008,3931973760	20008,3931973760
$\lambda_2$	14984,4241420390	14994,4573695159	14994,4573695159

Para esta exemplificação os métodos: LP, Método de Newton com busca linear e região de confiança alcançaram a solução. O método LP obteve solução com duas iterações enquanto que os métodos de Newton com busca linear e região de confiança convergiram com doze e oito iterações, respectivamente.

Observa-se no quadro 4.2 que a solução obtida pelo método de Newton tanto com busca linear como região de confiança coincide. A solução com o método LP é diferente em relação à solução do método de Newton isto se deve ao fato da não linearidade da função objetivo e em consequência a existência de mais de um ponto de mínimo da função.

No caso de uma otimização de pesos qualquer solução pode ser usada, porém para uma análise inicial pode-se utilizar, como critério de escolha, a solução que apresentar menores pesos.

Considerando o critério de custo para uma rede geodésica ainda pode-se concluir que no experimento 1 das soluções apresentadas pelos métodos LP, Newton por busca linear e Newton com região de confiança o que minimiza o custo para a precisão das observações da rede é a solução obtida pelo método LP. Para este método

$\sum_{j=1}^4 p_j = 1908224424,55195$ . Enquanto que para os outros dois métodos

$\sum_{j=1}^4 p_j = 2266132562,390140$ . A solução que apresenta um critério de custo menor, em

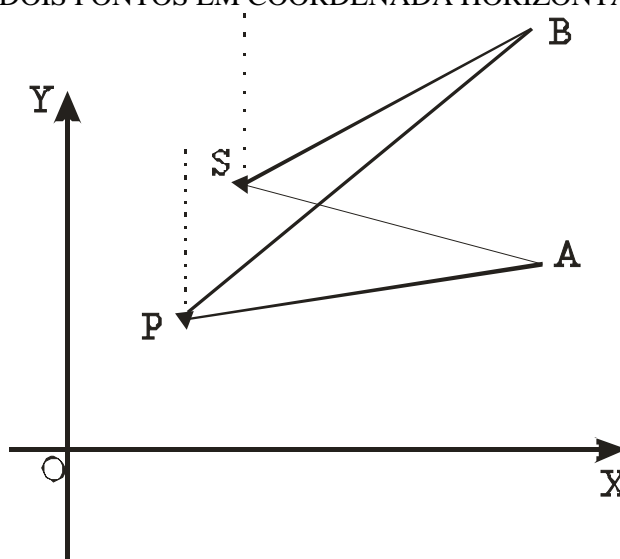
geral, requer menor precisão para efetivação do levantamento e em consequência a necessidade de instrumentos menos precisos que pode ser um fator de minimização de custo no levantamento.

Os pesos, obtidos por qualquer um dos três métodos aplicados, apresentados no quadro 4.2 conduzem a matriz de covariâncias dos parâmetros a apresentarem os valores próprios pré-fixados no planejamento quando a geometria da rede, representada pela figura 4.1 é pré-estabelecida. Os pesos assim obtidos se apresentam como uma medida de referência para a tomada de decisão sobre a precisão da rede, uma vez que qualquer peso maior que o obtido no processo de otimização conduz a uma precisão melhor que a pré-fixada para o levantamento.

#### 4.1.2 Experimento 2

Neste experimento, a otimização dos pesos será aplicada em uma rede horizontal com o propósito de densificá-la a partir de dois pontos conhecidos. O projeto prevê dois novos pontos a serem determinados, com precisão previamente estabelecida.

FIGURA 4.2 – PROJETO DE REDES GEODÉSICAS: GEOMETRIA PARA OBTENÇÃO DE DOIS PONTOS EM COORDENADA HORIZONTAIS



Considera-se o projeto, cuja configuração geométrica é dada na figura 4.2, com os pontos S e P sendo fixos (considerados isentos de erros) e os pontos A e B a serem determinados, por meio de quatro observações de distância e quatro observações de ângulo.

Para execução deste projeto são dados:

- 1) As coordenadas conhecidas dos pontos P e S e as coordenadas aproximadas dos pontos A e B colocadas no quadro 4.4.

QUADRO 4.4 - COORDENADAS HORIZONTAIS II

Ponto	Coordenadas	
	x (m)	y (m)
P	200	150
S	300	400
Ponto	Coordenadas aproximadas	
A	550	275
B	460	580

- 2) Os modelos funcionais das oito observações estão apresentados em: quatro observações de distância:

$$d_{PA} = \sqrt{(x_a - 200)^2 + (y_a - 150)^2}$$

$$d_{SA} = \sqrt{(x_a - 300)^2 + (y_a - 400)^2}$$

$$d_{SB} = \sqrt{(x_b - 300)^2 + (y_b - 400)^2}$$

$$d_{PB} = \sqrt{(x_b - 200)^2 + (y_b - 150)^2}$$

e quatro observações de direção:

$$\alpha_{PA} = \arctan\left(\frac{x_a - 200}{y_a - 150}\right)$$

$$\alpha_{PB} = \arctan\left(\frac{x_b - 200}{y_b - 150}\right)$$

$$\alpha_{SA} = \arctan\left(\frac{x_a - 300}{y_a - 400}\right)$$

$$\alpha_{SB} = \arctan\left(\frac{x_b - 300}{y_b - 400}\right)$$

3) A matriz **A** é obtida avaliando-se as derivadas parciais de cada modelo funcional em relação aos parâmetros em um ponto inicial, representado por  $\mathbf{X}_0$ , que neste caso são os valores aproximados do quadro 4.4. Para este exemplo a matriz planejamento **A** tem 8 linhas ( número de observações) e 4 colunas ( número de parâmetros). E escrita explicitamente fica:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,9417 & 0,3363 & 0 & 0 \\ 0,8944 & -0,4472 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6644 & 0,7474 \\ 0 & 0 & 0,5174 & 0,8557 \\ 0,0009 & -0,0025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0017 & -0,0010 \\ -0,0016 & -0,0032 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0031 & -0,0028 \end{bmatrix}$$

4) Valores próprios pré-estabelecidos para a matriz de covariâncias são:

$$\mu_1 = \frac{1}{17000} \text{ m}^2 \quad \mu_2 = \frac{1}{18000} \text{ m}^2 \quad \mu_3 = \frac{1}{19000} \text{ m}^2 \quad \text{e} \quad \mu_4 = \frac{1}{20000} \text{ m}^2.$$

Desta forma o valor limite para a variância de qualquer parâmetro estimado nesta rede é de  $\frac{1}{17000} \text{m}^2 \cong 0,0006 \text{m}^2$ , que é o valor próprio máximo estabelecido para a matriz de covariâncias.

#### 5) Aplicação do teste de igualdade dos valores próprios.

Para este caso aplicou-se a estatística dada em (3.26) com um nível de significância para o teste de 5%. O resultado indicou que a hipótese da rede projetada ser homogênea e isotrópica não é rejeitada com um nível de confiança de 95%.

6) Os valores próprios utilizados no processo de otimização estabelecido pela equação (3.28) são

$$\lambda_1^* = 20000 \quad \lambda_2^* = 19000 \quad \lambda_3^* = 18000 \quad \lambda_4^* = 17000$$

A matriz **P** é uma matriz diagonal cujos elementos na diagonal principal são tomados como incógnitas.

#### PROBLEMA 2

O problema é enunciado como: quais pesos ( ou qual matriz de pesos) deve ser atribuído às observações para que a matriz dos coeficientes das equações normais (matriz **N**) apresente os valores próprios  $\lambda_1^* = 20000 \quad \lambda_2^* = 19000 \quad \lambda_3^* = 18000$  e  $\lambda_4^* = 17000$  ?

A matriz **N** é escrita como,

$$\mathbf{N} = \sum_{j=1}^8 \left( p_j \mathbf{a}_j^t \mathbf{a}_j \right)$$

como anteriormente  $p_j = p_{jj}$  é cada elemento da diagonal principal da matriz **P** e  $\mathbf{a}_j$  é a j-ésima linha da matriz **A**.

O sistema de equações não-lineares a ser solucionado, de forma irrestrita, pelas técnicas citadas anteriormente é dado por,

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{p}) - 20000 \\ \lambda_2(\mathbf{p}) - 19000 \\ \lambda_3(\mathbf{p}) - 18000 \\ \lambda_4(\mathbf{p}) - 17000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para solucionar o problema anterior, novamente os três métodos propostos foram utilizados e o peso obtido por cada método para cada observação planejada é apresentado no quadro 4.5

QUADRO 4.5- RESULTADO DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO DOS PESOS

<b>Método de Newton: busca linear</b>	<b>Método de Newton: Região de confiança</b>	<b>Método LP</b>
-4051,20780	10646,34552	5031,44483
23273,84998	8576,29666	14191,19688
57063,78842	8930,53436	17649,24631
-37038,37001	11094,88405	2376,17210
-659388040,71994	1370711521,50722	595153210,92131
-9737356632,04401	2416290048,22761	214814148,42474
1761813116,29858	613566757,57282	1052231066,20629
3221225473,00078	429496730,60176	935182283,82463

Os valores próprios calculados com a matriz configuração **A** e os pesos obtidos por cada método estão expostos no quadro 4.6

QUADRO 4.6 – VALORES PRÓPRIOS: EXPERIMENTO 2

	<b>Método de Newton com busca linear</b>	<b>Método de Newton com região de confiança</b>	<b>Método LP</b>
$\lambda_1$	20395,3229203618	20032,3832241999	20034,7900434780
$\lambda_2$	19010,1130659658	18982,7962309010	18991,0174954021
$\lambda_3$	18107,4613610051	17769,1013039815	17900,5803543482
$\lambda_4$	17966,8783294697	16886,5967896558	17145,6108300537

O método LP obteve solução com onze iterações enquanto que os métodos de Newton com busca linear e região de confiança convergiram com vinte e cinco e quinze iterações, respectivamente. A discrepância entre as soluções obtidas por cada método deve-se ao fato da não linearidade da função objetivo, ou seja, os pontos de mínimo obtido por cada método diferem entre si.

A solução apresentada no quadro 4.5 conseguida com a aplicação do método de Newton com busca linear forneceu as observações  $\ell_1, \ell_4, \ell_5$  e  $\ell_6$  com pesos negativos. Como a solução informa que as observações devem ser realizadas com pesos iguais ou maiores que o indicado pelo resultado, então estas observações podem ser realizadas no levantamento com instrumentos menos exigentes, assim os pesos irão satisfazer a condição de precisão.

Para as observações com pesos positivos os instrumentos devem ser selecionados de forma a realizar estas observações com uma precisão que fornecerá pesos iguais ou maiores que aqueles indicados no processo de otimização. Assim sendo os mesmos instrumentos selecionados para as observações com pesos positivos podem ser utilizados para realizar as observações com pesos negativos. Com estas considerações a precisão pré-fixada para a rede estará satisfeita.

Os métodos de região de confiança e LP apresentaram como resultado de suas aplicações somente pesos positivos. Desta forma, os instrumentos selecionados para realizar as observações no levantamento devem fornecer uma precisão que possibilite obter pesos iguais ou maiores que aqueles indicados pela solução.

Do ponto de vista da solução da otimização de pesos qualquer solução fornecida pode ser usada, porém para uma análise inicial pode-se utilizar, como critério de escolha, a solução que apresenta a menor somatória.

Obteve-se para o método de Newton com busca linear e região de confiança e ainda o método LP, respectivamente, os seguintes valores para o critério de custo

$$\sum_{j=1}^8 p_j = 4983118926,93776, \quad \sum_{j=1}^8 p_j = 4830104305,97 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^8 p_j = 2797419957,437090$$

O método que apresentou melhor eficiência quanto ao critério de custos da



precisão das observações para a rede é o método LP seguido do método Newton com região de confiança e busca linear.

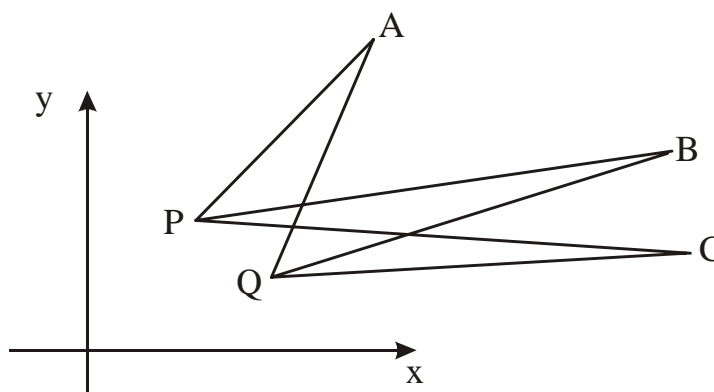
Os pesos apresentados no quadro 4.5 são tomados como uma medida de referência para a decisão sobre a precisão da rede. Se ao realizar o levantamento forem obtidos pesos iguais ou maiores que os obtidos por um dos três métodos aplicados a rede apresentará uma precisão igual ou melhor que aquela pré fixada para a matriz de covariâncias dos parâmetros.

#### 4.1.3 Experimento 3

No exemplo a seguir formula-se um problema de valor próprio inverso aplicado à Lei de Propagação de Covariâncias utilizada após um ajustamento por mínimos quadrados na sua forma paramétrica.

Na figura 4.3 está representada uma rede geodésica bidimensional onde as coordenadas dos pontos  $P(x_p, y_p)$  e  $Q(x_q, y_q)$  são conhecidas e consideradas isentas de erros.

FIGURA 4.3- REDE GEODÉSICA BIDIMENSIONAL



As coordenadas dos pontos  $A(x_a, y_a)$ ,  $B(x_b, y_b)$  e  $C(x_c, y_c)$ , designadas de parâmetros, devem ser estimadas com uma precisão pré-definida dada pelos valores

próprios da matriz de covariâncias dos parâmetros estimados, obtida pela relação

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N}^+ = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+.$$

Dados:

1) as coordenadas dos pontos fixos e também as coordenadas aproximadas aos parâmetros estão apresentadas no quadro 4.7

QUADRO 4.7- COORDENADAS HORIZONTAIS DE UMA REDE GEODÉSICA BIDIMENSIONAL

pontos	Coordenadas dos Pontos Fixos	
	x (m)	y (m)
P	2,1	2,5
Q	3,5	1,3
pontos	Valores Aproximados	
	x (m)	y (m)
A	1,0	2,0
B	3,0	4,0
C	5,0	6,0

2) O modelo funcional das doze observações, apresentadas em: seis observações de distância:

$$d_{PA} = \sqrt{(2,1 - x_a)^2 + (2,5 - y_a)^2}$$

$$d_{PB} = \sqrt{(2,1 - x_b)^2 + (2,5 - y_b)^2}$$

$$d_{PC} = \sqrt{(2,1 - x_c)^2 + (2,5 - y_c)^2}$$

$$d_{QA} = \sqrt{(3,5 - x_a)^2 + (1,3 - y_a)^2}$$

$$d_{QB} = \sqrt{(3,5 - x_b)^2 + (1,3 - y_b)^2}$$

$$d_{QC} = \sqrt{(3,5 - x_c)^2 + (1,3 - y_c)^2}$$

e seis observações de direção:

$$\alpha_{PA} = a \tan \left( \frac{x_a - 2,1}{y_a - 2,5} \right)$$

$$\alpha_{PB} = a \tan \left( \frac{x_b - 2,1}{y_b - 2,5} \right)$$

$$\alpha_{PC} = a \tan \left( \frac{x_c - 2,1}{y_c - 2,5} \right)$$

$$\alpha_{QA} = a \tan \left( \frac{x_a - 3,5}{y_a - 1,3} \right)$$

$$\alpha_{QB} = a \tan \left( \frac{x_b - 3,5}{y_b - 1,3} \right)$$

$$\alpha_{QC} = a \tan \left( \frac{x_c - 3,5}{y_c - 1,3} \right)$$

3) A matriz **A** é obtida avaliando-se as derivadas parciais de cada modelo funcional em relação aos parâmetros em um ponto inicial, aqui representado por **X**<sub>0</sub>, que neste caso é dado pelos valores aproximados do quadro 4.7. Para o exemplo a matriz **A** apresenta 12 linhas (número de observações) e 6 colunas (número de parâmetros). A matriz **A** escrita explicitamente fica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,9104 & -0,4138 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5145 & 0,8575 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6380 & 0,7700 \\ -0,9630 & 0,2696 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1821 & 0,9833 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3040 & 0,9527 \\ -0,3425 & 0,7534 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4902 & -0,2941 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1694 & -0,1404 \\ 0,1039 & 0,3709 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3581 & 0,0663 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1931 & -0,0616 \end{bmatrix}$$

4) Valores próprios pré-estabelecidos para a matriz de covariâncias são:

$$\mu_1 = \frac{1}{10000} \text{ m}^2 \quad \mu_2 = \frac{1}{20000} \text{ m}^2 \quad \mu_3 = \frac{1}{30000} \text{ m}^2 \quad \mu_4 = \frac{1}{40000} \text{ m}^2$$

$$\mu_5 = \frac{1}{50000} \text{ m}^2 \quad \text{e} \quad \mu_6 = \frac{1}{60000} \text{ m}^2.$$

Desta forma o valor limite para a variância de qualquer parâmetro estimado nesta rede é de  $\frac{1}{10000} \text{ m}^2 = 0,0001 \text{ m}^2$ , que é o valor próprio máximo estabelecido para a matriz de covariâncias.

5) Aplicação do teste de igualdade dos valores próprios.

Para este caso aplicou-se a estatística dada em (3.26) com um nível de significância para o teste de 5%. O resultado indicou que a hipótese da rede projetada ser homogênea e isotrópica não é rejeitada com um nível de confiança de 95%.

6) Os valores próprios utilizados no processo de otimização estabelecido pela equação (3.28) são

$$\lambda_1^* = 60000 \quad \lambda_2^* = 50000 \quad \lambda_3^* = 40000 \quad \lambda_4^* = 30000 \quad \lambda_5^* = 20000 \quad \lambda_6^* = 10000.$$

A matriz  $\mathbf{P}$  é uma matriz diagonal cujos elementos na diagonal principal são tomados como incógnitas.

### PROBLEMA 3

O problema é enunciado como: quais pesos ( ou qual matriz de pesos) deve ser atribuído às observações para que a matriz dos coeficientes das equações normais (matriz **N**) apresente os valores próprios  $\lambda_1 = 60000$  e  $\lambda_2 = 50000$   $\lambda_3 = 40000$   $\lambda_4 = 30000$   $\lambda_5 = 20000$   $\lambda_6 = 10000$  ?

A matriz **N** é escrita como,

$$\mathbf{N} = \sum_{j=1}^{12} (p_j \mathbf{a}_j^t \mathbf{a}_j)$$

como anteriormente  $p_j = p_{jj}$  é cada elemento da diagonal principal da matriz **P** e  $\mathbf{a}_j$  é a j-ésima linha da matriz **A**.

O sistema de equações não-lineares a ser solucionado, de forma irrestrita, pelas técnicas citadas anteriormente é dado por,

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{p}) - 60000 \\ \lambda_2(\mathbf{p}) - 50000 \\ \lambda_3(\mathbf{p}) - 40000 \\ \lambda_4(\mathbf{p}) - 30000 \\ \lambda_5(\mathbf{p}) - 20000 \\ \lambda_6(\mathbf{p}) - 10000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com estas considerações formula-se o problema de valor próprio inverso como dado na (3.10) aplicado para obter os pesos otimizados para uma rede geodésica como:

Conhecida a matriz **A** , obter os pesos para as observações geodésicas para que se tenha como valores próprios da matriz **N** os valores:

$$\lambda_1^* = 60000 \quad \lambda_2^* = 50000 \quad \lambda_3^* = 40000 \quad \lambda_4^* = 30000 \quad \lambda_5^* = 20000 \quad \lambda_6^* = 10000 .$$

O mesmo planejamento foi solucionado com o método de Newton com região de confiança e busca linear e ainda o método LP os quais apresentaram os seguintes pesos para o planejamento mostrado no quadro 4.8:

QUADRO 4.8 – PESOS OBTIDOS PELOS MÉTODOS: LP, BUSCA LINEAR E REGIÃO DE CONFIANÇA

<b>Método LP</b>	<b>Newton com busca linear</b>	<b>Região de confiança</b>
32863,0658550045	16223,990938207	38387,044371792
25834,5312077311	62963,001483236	52289,652144981
31525,7327721002	15962,797691323	58365,636478383
19326,2123593860	25186,327047263	13745,143846701
17426,2420515734	-8089,964200438	-8963,175930675
30426,9253207719	45989,892490103	3587,051733723
38368,2386915425	16534,379511622	29896,199485227
43590,0701572207	123639,416048711	121506,322903409
96612,6642935713	-227022,855576282	649520,622412124
10319,6560809007	116364,513005101	49815,089407240
18805,5575380972	-190596,687062390	-173679,563561651
82050,7991683037	463332,135927298	-569342,949452022

Os valores próprios calculados com a matriz planejamento **A** e os pesos obtidos por cada método estão expostos no quadro 4.9

QUADRO 4.9 – VALORES PRÓPRIOS: EXPERIMENTO 3

	<b>Método LP</b>	<b>Newton com busca linear</b>	<b>Newton com região de confiança</b>
$\lambda_1$	59999,7103639422	60000,8902469259	59997,6669503153
$\lambda_2$	50004,2176230732	50000,5507402510	44216,3228490823
$\lambda_3$	40000,4941814461	39894,1599369324	39999,9973817839
$\lambda_4$	29998,1487884617	29490,7868611145	29785,6007117413
$\lambda_5$	20000,4318206764	19998,3509797623	19998,7976023335
$\lambda_6$	10000,5047105218	9998,2059492070	10004,4321428952

Os métodos LP, Newton com busca linear e região de confiança alcançaram a solução.

O método LP obteve solução com quinze iterações enquanto que os métodos de Newton com busca linear e região de confiança convergiram com setenta e duas e vinte e oito iterações, respectivamente. Novamente as soluções diferiram entre si, fato este decorrente da não linearidade da função objetivo.

As soluções apresentadas no quadro 4.8 obtidas com a aplicação do método de Newton com busca linear e região de confiança forneceram, respectivamente, as observações  $\ell_5, \ell_9$  e  $\ell_{11}$  e  $\ell_5, \ell_{11}$  e  $\ell_{12}$  com pesos negativos. Como cada solução informa que as observações devem ser realizadas com pesos iguais ou maiores que os indicados pelos resultados, para qualquer uma das duas soluções utilizadas, os instrumentos selecionados para as observações com pesos positivos podem ser usados para realizar aquelas com pesos negativos. Desta forma a precisão pré-fixada para a rede estará satisfeita.

O método LP apresentou como resultado de sua aplicação somente pesos positivos. Assim sendo, os instrumentos selecionados para realizar as observações no levantamento devem fornecer uma precisão que possibilite obter pesos iguais ou maiores que aqueles indicados na solução do método LP.

Novamente para uma análise inicial pode-se utilizar, como critério de escolha para a melhor solução, aquela que apresentar a menor somatória. Assim, os métodos LP, busca linear e região de confiança, respectivamente, apresentaram os seguintes

$$\begin{aligned} \text{valores} \quad \sum_{j=1}^{12} p_j &= 447149,6954962032 & \sum_{j=1}^{12} p_j &= 886196,454142864 & \text{e} \\ \sum_{j=1}^{12} p_j &= 1017112,762783580. \end{aligned}$$

O resultado que apresenta menor custo do ponto de vista das observações é o resultado da otimização alcançado com o método LP seguido do método de Newton com busca linear e com região de confiança.

Os pesos apresentados no quadro 4.8 se apresentam como uma medida de referência para a tomada de decisão sobre a precisão da rede. Se ao realizar o levantamento forem conseguidos pesos iguais ou maiores que os obtidos por um dos três métodos aplicados a rede apresentará um precisão final igual ou melhor que aquela pré fixada para a matriz de covariâncias dos parâmetros.

## 4.2 EXPERIMENTO SOBRE OTIMIZAÇÃO RESTRITA

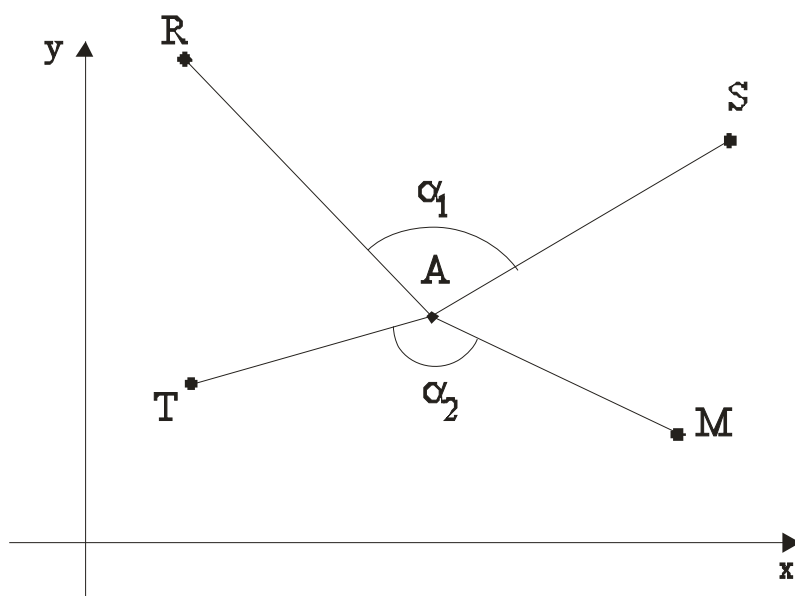
Nos experimentos a seguir estudam-se as obtenções dos pesos das observações geodésicas impondo restrições aos mesmos. Duas redes geodésicas bidimensionais são simuladas, uma com observações de distância e ângulo e outra somente com observações de distâncias. Os pesos das observações geodésicas para as duas redes são obtidos considerando restrições a estes pesos. Primeiramente simula-se uma restrição quanto à precisão do equipamento e em seguida restrição quanto à confiabilidade representada pelo número de redundância mínimo para cada observação considerando o critério da confiabilidade externa.

### 4.2.1 Experimento 1

Considera-se neste experimento uma rede geodésica como representada na figura 4.4, na qual quatro observações de distâncias e duas observações de ângulo são planejadas a partir de quatro pontos com coordenadas conhecidas. A finalidade é estimar as coordenadas do ponto A fazendo-se uso do método dos mínimos quadrados na forma paramétrica.



FIGURA 4.4 – REDE GEODÉSICA BIDIMENSIONAL: DISTÂNCIAS E ÂNGULOS



As coordenadas dos pontos conhecidos R, T, S e M e também as coordenadas aproximadas do ponto A estão apresentados no quadro 4.10

QUADRO 4.10- COORDENADAS FIXAS E APROXIMADAS DA REDE GEODÉSICA

Ponto	Coordenadas fixas	
	x	y
R	20	70
T	30	20
M	110	20
S	120	60
Ponto	Coordenadas aproximadas	
A	70	30

O modelo funcional de cada observação de distância é,

$$d_{RA} = \sqrt{(x_a - 20)^2 + (y_a - 70)^2}$$

$$d_{TA} = \sqrt{(x_a - 30)^2 + (y_a - 20)^2}$$

$$d_{SA} = \sqrt{(x_a - 120)^2 + (y_a - 60)^2}$$

$$d_{MA} = \sqrt{(x_a - 110)^2 + (y_a - 20)^2}$$

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{120 - x_a}{60 - y_a}\right) - \arctan\left(\frac{20 - x_a}{70 - y_a}\right)$$

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{30 - x_a}{20 - y_a}\right) - \arctan\left(\frac{110 - x_a}{20 - y_a}\right)$$

A matriz de configuração (ou matriz de planejamento)  $\mathbf{A}$  é obtida das derivadas parciais do modelo funcional de cada equação de observação avaliadas nas

coordenadas aproximadas do ponto A, isto é,  $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}_a} \bigg|_{\mathbf{X}_0}$ . Para a rede representada

pela figura 4.4 a matriz de configuração é,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,7809 & -0,6247 \\ 0,9701 & 0,2425 \\ -0,8575 & -0,5145 \\ -0,9701 & 0,2425 \\ 0,0009 & 0,0269 \\ 0 & -0,0471 \end{bmatrix}.$$

A matriz  $\mathbf{A}$  apresenta seis linhas (número de observações) e duas colunas (número de parâmetros).

Os valores próprios pré-estabelecidos (planejados) para a matriz de covariâncias dos parâmetros estimados são  $\mu_1 = 2$  e  $\mu_2 = 0,5$ , em consequência os valores próprios utilizados do processo de otimização, ou seja, para a matriz dos coeficientes das equações normais  $\mathbf{N}$ , obtidos a partir de  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são  $\lambda_2 = \frac{1}{\mu_2} = 2$  e  $\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1} = 0,5$ .

O teste para igualdade dos valores próprios para a matriz de covariâncias dos parâmetros estimados foi aplicado usando tanto a estatística  $\chi^2$  como a estatística F e em ambos os casos a hipótese nula não foi rejeitada com uma significância para o teste de 5%, ou seja, a rede postulada é homogênea e isotrópica condicionada à significância do teste.

A matriz  $\mathbf{N}$  é escrita como

$$\mathbf{N}(\mathbf{P}) = \sum_{j=1}^6 \left( p_j \mathbf{a}_j^t \mathbf{a}_j \right)$$

onde  $\mathbf{a}_j$  é a j-ésima linha da matriz de configuração obtida anteriormente e  $p_j = p_{jj}$  é cada elemento da diagonal da matriz  $\mathbf{P}$  tomado como incógnita.

Nestas condições o sistema de equações não-lineares a ser solucionado, de forma irrestrita, pelas técnicas citadas anteriormente é dado por,

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{p}) - 2 \\ \lambda_2(\mathbf{p}) - 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#### 4.2.1.1 Experimento 1: Otimização com Restrições

Nesta seção estão apresentados resultados sobre a viabilidade da otimização dos pesos quando estes necessitam satisfazer critérios de restrições pré-definidos quanto à precisão da observação (por exemplo, instrumental disponível) ou então critérios de confiabilidade quanto à detecção de erros grosseiros.

##### 4.2.1.1.1 Restrição aos pesos quanto à precisão da observação

Nesta simulação o projeto anterior é solucionado considerando restrições às precisões de distância e ângulo. Estas restrições se originam, por exemplo, de equipamentos disponíveis.

## Exemplo 4.1

Considerando, por exemplo, que existem três instrumentos distintos cada um com uma precisão de  $\sigma_1 = 1,25\text{cm}$ ,  $\sigma_2 = 2,00\text{cm}$  e  $\sigma_3 = 4,00\text{cm}$ , respectivamente, os quais podem ser utilizados para realizar observações de distâncias. Da definição de peso se tem que  $p = \frac{1}{\sigma_i^2}$  assim, o peso que cada instrumento disponível fornece é, respectivamente, de  $p = 0,64$ ,  $p = 0,25$  e  $p = 0,0625$ . Desta forma se tem uma restrição instrumental à solução do problema de otimização dos pesos, ou seja, não se tem instrumento com precisão melhor que  $\sigma_1 = 1,25\text{cm}$  para realizar as observações de distância. Com isso, interessa-se por pesos que ao menos sejam menores que 0,64, isto é,  $p \leq 0,64$ .

Como no exemplo 4.1, considerando a melhor precisão instrumental para uma observação de distância que pode ser obtida em campo é  $\sigma_d = 1,25\text{cm}$  e para uma observação de ângulo é de  $\sigma_\alpha = 2'' = \frac{2\pi}{648000}\text{rd}$  tem-se as restrições instrumentais para as observações. Nestas condições, tomando a definição (2.9) e o estabelecido no problema P2 constrói-se,

$$\text{minimizar } f(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{p})^t \mathbf{F}(\mathbf{p})$$

sujeito a

$$p_i - 0,64 \leq 0 \text{ para } i = 1, 2, 3, 4 \text{ observações de distância}$$

$$p_i - \left( \frac{648000}{2\pi} \right)^2 \leq 0 \text{ para } i = 1, 2 \text{ observações de ângulo}$$

$$\text{onde } \left( \frac{648000}{2\pi} \right)^2 \cong 10636292574,03805$$

Pelas restrições é observado que a solução do problema é procurada no intervalo  $b \leq p_i \leq \frac{1}{\sigma_i^2}$  e possivelmente  $b = -\infty$ , assim pesos negativos podem ocorrer na solução.

Para solução do problema anterior aplica-se o algoritmo de Lagrangeano Aumentado utilizando a penalidade **tipo 1** e ainda resolvendo-se o subproblema, que é a minimização da função Lagrangeano Aumentado, pelo método de Newton com região de confiança. Os resultados estão apresentados no quadro 4.11.

QUADRO 4.11 – RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO DOS PESOS COM RESTRIÇÃO DE EQUIPAMENTO

<b>Peso</b> \ <b>Restrição</b>	$p_i \leq \frac{1}{\sigma_i^2}$
$p_1$	0,639737248488
$p_2$	0,605266802986
$p_3$	0,638411579402
$p_4$	0,605863469321
$p_5$	182,186407487547
$p_6$	-54,765183044281

Observa-se no quadro 4.11 que a solução ao problema foi alcançado. Os valores próprios são obtidos com os pesos que satisfazem as restrições para os instrumentos de distância e ângulo. Esses pesos satisfazem simultaneamente os critérios de precisão para os parâmetros bem como a restrição para a precisão da observação, contudo um dos pesos para a observação de ângulo é negativo. Nesta situação pode-se fazer uso da restrição de não negatividade para os pesos de forma a alcançar a solução com todos os pesos positivos e ainda satisfazer as restrições.

Com o exposto acima se escreve

$$\text{minimizar } f(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{p})^t \mathbf{F}(\mathbf{p})$$

sujeito a

$$p_i - 0,64 \leq 0 \text{ para } i = 1, 2, 3, 4 \text{ observações de distância}$$

$$p_i - \left( \frac{648000}{2\pi} \right)^2 \leq 0 \text{ para } i = 1, 2 \text{ observações de ângulo}$$

$$-p_i \leq 0 \text{ para } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

O resultados obtidos para a solução do problema anterior estão colocados no quadro 4.12.

QUADRO 4.12 – RESULTADO: OTIMIZAÇÃO DOS PESOS COM RESTRIÇÃO DE EQUIPAMENTO E NÃO NEGATIVIDADE

<b>Peso</b> \ <b>Restrição</b>	$p_i \leq \frac{1}{\sigma_i^2} \text{ e } p_i \geq 0$
$p_1$	0,63999774326552
$p_2$	0,60998261094542
$p_3$	0,63311024109410
$p_4$	0,60630399261358
$p_5$	8,42303877245852
$p_6$	0,09357587937570

No quadro 4.12, os resultados mostram que a solução ao problema é encontrado no intervalo  $0 \leq p_i \leq \frac{1}{\sigma_i^2}$  assim todos os pesos satisfazem as restrições de equipamento e não negatividade para o levantamento.

#### 4.2.1.1.2 Restrição aos pesos quanto à confiabilidade das observações

Neste experimento os pesos foram obtidos mantendo a precisão anterior aos parâmetros,  $\mu_1 = 2$  e  $\mu_2 = 0,5$ , e fixando-se um número mínimo para a redundância parcial de cada observação. A redundância mínima foi obtida por critérios de confiabilidade externa dada pela relação (3.41) mediante as seguintes considerações:

- 1)  $\delta_{x,máx} = 8$  seguindo a relação (3.48);
- 2) Obtenção do parâmetro de não centralidade  $\delta_0$  para a rede planejada.

Considerando que para o teste global, após a rede ser ajustada, será utilizado como nível de significância o valor  $\alpha = 0,05$  e que para esta rede o número de redundância é  $r = 4$ , usando os monogramas de BAARDA (Anexo) para  $\beta_0 = 0,80$  estima-se um valor para a probabilidade  $\alpha_0 = 0,009$  com isto calcula-se o parâmetro de não centralidade pela relação (2.98), com isto,  $\delta_0 = 3,45372$ .

Com estas considerações consegue-se o número de redundância mínimo para a controlabilidade externa pela relação (3.41) que é

$$r_{i,E,min} = 0,16.$$

Desta forma as restrições aos pesos, em cada passo do método de Lagrangeano Aumentado, são obtidas pela relação (3.46) adicionando-se ainda restrições de não negatividade como estabelecido no problema P3 ou P4.

$$\text{minimizar } f(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{p})^t \mathbf{F}(\mathbf{p})$$

$$\text{sujeito a } p_i - \frac{1 - 0,16}{q_{\ell_i}} \leq 0 \quad i = 1,2,3,4,5,6 \quad (\text{restrições de confiabilidade})$$

$$-p_i \leq 0 \quad i = 1,2,3,4,5,6 \quad (\text{restrições de não negatividade}).$$

A solução obtida para a otimização com restrições de confiabilidade utilizando o método de Lagrangeano Aumentado com a penalidade **tipo 1** está apresentado no quadro 4.13.

QUADRO 4.13 – OTIMIZAÇÃO DOS PESOS COM RESTRIÇÃO DE CONFIABILIDADE

<b>Peso</b> \ <b>Restrição</b>	$p_i \leq \frac{1-0,16}{q_{\ell_i}}$ e $p_i \geq 0$
$p_1$	0,66049829405196
$p_2$	0,59685924013302
$p_3$	0,64855075697355
$p_4$	0,59267383714157
$p_5$	0,48080326414218
$p_6$	0,48270475748344

Os resultados apresentados no quadro 4.13 mostram-se satisfatórios quanto à aplicação do algoritmo de Lagrangeano Aumentado nas restrições dos pesos, obtendo-se para o projeto da rede tanto os critérios de precisão para a rede representada pelos valores próprios da matriz de covariâncias, quanto os critérios de confiabilidade e positividade impostos para cada observação. Com o resultado da otimização dos pesos colocados no quadro 4.13 são obtidos os seguintes números de redundância para cada observações mostrados no quadro 4.14.



QUADRO 4.14 – NÚMERO DE REDUNDÂNCIA EM FUNÇÃO DOS PESOS OBTIDOS NO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO

<b>Redundância</b>	<b>valor</b>
$r_1$	0,30559838394598
$r_2$	0,63862327161556
$r_3$	0,39789106356074
$r_4$	0,66072098731573
$r_5$	0,99930334935784
$r_6$	0,99786294420414

Observando o quadro 4.14 nota-se que o número de redundância obtido para cada observação satisfaz o critério de redundância mínimo que é  $r_{i,E,min} = 0,16$  estabelecido para o projeto. Os pesos que satisfazem simultaneamente o critério de precisão para os parâmetros e o de confiabilidade para a rede estão apresentados no quadro 4.13.

No quadro 4.15 estão apresentados os valores, para a medida da confiabilidade externa geral, calculados pela relação (2.109) em função dos valores colocados no quadro 4.11 e  $\delta_0 = 3,45372$ .

QUADRO 4.15- VALORES CALCULADOS PARA A CONFIABILIDADE EXTERNA GERAL

<b>Confiabilidade externa geral</b>	$\delta_x = \lambda_{0i} = \delta_0 \sqrt{\frac{1-r_i}{r_i}}$
$\lambda_{01}$	5,20615339792493
$\lambda_{02}$	2,59803409561022
$\lambda_{03}$	4,24856795826830
$\lambda_{04}$	2,47489382638453
$\lambda_{05}$	0,09118973946536
$\lambda_{06}$	0,15983048174620

O quadro 4.15 mostra que os resultados atendem ao critério estabelecido para a confiabilidade externa geral ,  $\delta_{x,m\acute{a}x} = 8$ , no planejamento do levantamento, visto que o número de redundância mínimo para cada observação foi alcançado. Desta forma tem-se uma rede planejada de forma precisa e confiável segundo os critérios estabelecidos no planejamento.

#### 4.2.1.1.3 Aplicação dos métodos restritos: Experimento 1

Tendo em vista que os métodos irrestritos podem apresentar uma solução qualquer em  $R^n$ , pode acontecer que alguma destas soluções satisfaça as restrições impostas. Neste item os métodos irrestritos são aplicados ao planejamento para comparar cada solução irrestrita com a solução restrita e verificar se os critérios de restrição adotados anteriormente ocorrem na solução irrestrita.

Os três métodos irrestritos foram aplicados ao sistema não-linear

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{p}) - 2 \\ \lambda_2(\mathbf{p}) - 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e os resultados estão apresentados no quadro 4.16

QUADRO 4.16 – RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO DOS PESOS IRRESTRITA I

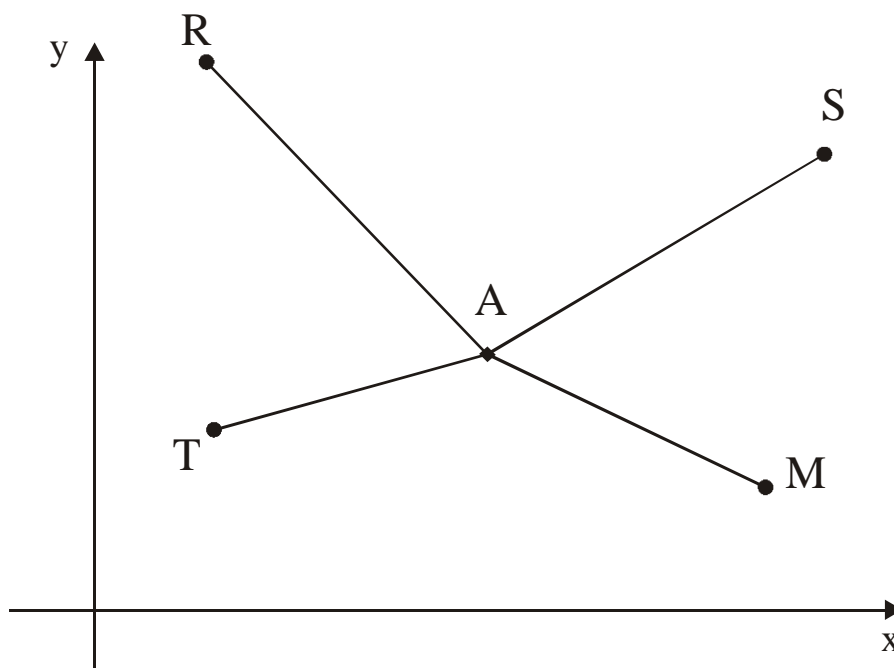
<b>Método</b> <b>Peso</b>	<b>LP</b>	<b>Newton com busca linear</b>	<b>Newton com região de confiança</b>
$p_1$	0,65885820669732	0,66208295021524	0,56957719400010
$p_2$	0,59956746787724	0,59801646612404	1,06646333388491
$p_3$	0,65629357442999	0,64150686393982	0,24018155201728
$p_4$	0,58527628158218	0,59576429908343	0,50081530502826
$p_5$	0,00059695498986	0,80308810978250	-7,80291022839498
$p_6$	0,00182291232416	0,92459960788471	58,07820161084926

Os três métodos irrestritos aplicados alcançaram solução para o critério de precisão para o levantamento. Comparando o quadro 4.12 e o quadro 4.13 com o quadro 4.16 e os critérios utilizados verifica-se que nenhuma solução obtida por cada método satisfaz todas as restrições impostas para cada observação tanto no caso da restrição de precisão para a observação quanto de confiabilidade, o que justifica a aplicação dos métodos irrestritos. Pode-se aplicar algum método irrestrito e verificar se a solução satisfaz o critério de restrição, mas não há garantias que a solução irrestrita satisfará a restrição adotada.

### 4.2.2 Experimento 2

Considera-se neste experimento uma rede geodésica representada na figura 4.5, onde somente observações de distâncias são planejadas a partir de quatro pontos conhecidos com a finalidade de estimar as coordenadas do ponto A fazendo-se uso do método dos mínimos quadrados na forma paramétrica.

FIGURA 4.5 – REDE GEODÉSICA BIDIMENSIONAL



As coordenadas dos pontos conhecidos R, T, S e M e também as coordenadas aproximadas do ponto A estão apresentados no quadro 4.10

O modelo funcional de cada observação de distância é,

$$d_{RA} = \sqrt{(x_a - 20)^2 + (y_a - 70)^2}$$

$$d_{TA} = \sqrt{(x_a - 30)^2 + (y_a - 20)^2}$$

$$d_{SA} = \sqrt{(x_a - 120)^2 + (y_a - 60)^2}$$

$$d_{MA} = \sqrt{(x_a - 110)^2 + (y_a - 20)^2}$$

A matriz de configuração (ou matriz de planejamento)  $\mathbf{A}$  é obtida das derivadas parciais do modelo funcional de cada equação de observação avaliadas nas coordenadas aproximadas do ponto  $A$ , isto é,  $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}_a} \bigg|_{\mathbf{X}_0}$ . Para a rede representada

pela figura 4.5 a matriz de configuração é,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,7809 & -0,6247 \\ 0,9701 & 0,2425 \\ -0,8575 & -0,5145 \\ -0,9701 & 0,2425 \end{bmatrix}.$$

A matriz  $\mathbf{A}$  apresenta quatro linhas (número de observações) e duas colunas (número de parâmetros).

Para os valores próprios pré-estabelecidos (planejados) para a matriz de covariâncias dos parâmetros estimados são usados os mesmos do projeto anterior  $\mu_1 = 2$  e  $\mu_2 = 0,5$ , em consequência os valores próprios utilizados do processo de otimização, ou seja, para a matriz dos coeficientes das equações normais  $\mathbf{N}$ , obtidos a partir de  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são  $\lambda_2 = \frac{1}{\mu_2} = 2$  e  $\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1} = 0,5$ .

A matriz  $\mathbf{N}$  é escrita como

$$\mathbf{N}(\mathbf{P}) = \sum_{j=1}^4 \left( p_j \mathbf{a}_j^t \mathbf{a}_j \right)$$

onde  $\mathbf{a}_j$  é a  $j$ -ésima linha da matriz de configuração obtida anteriormente e  $p_j = p_{jj}$  é cada elemento da diagonal da matriz  $\mathbf{P}$  tomado como incógnita.

Nestas condições o sistema de equações não-lineares a ser solucionado, de forma irrestrita, pelas técnicas citadas anteriormente é dado por,

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{p}) - 2 \\ \lambda_2(\mathbf{p}) - 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#### 4.2.1.1 Experimento 2: Otimização com Restrições

Nesta seção simula-se uma rede geodésica com observações de distância e apresentam-se os resultados sobre a viabilidade de otimização dos pesos quanto estes necessitam satisfazer critérios de restrições pré-definidos quanto à precisão da observação (por exemplo, instrumental disponível) ou então critérios de confiabilidade quanto à detecção de erros grosseiros.

##### 4.2.1.1.1 Restrição aos pesos quanto à precisão da observação

Nesta simulação o projeto anterior foi solucionado considerando que a melhor precisão para uma observação que pode ser obtida em campo é  $\sigma = 1,25$  diante de, por exemplo, equipamento disponível. Nestas condições, tomando a definição (2.9) tem-se a seguinte restrição para cada peso no levantamento  $p_i \leq 0,64$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Aplicou-se o algoritmo de Lagrangeano Aumentado utilizando a penalidade **tipo 1** e ainda resolvendo-se o subproblema (minimização da função Lagrangeano Aumentado) por meio do método de Newton com região de confiança. Os resultados estão apresentados no quadro 4.17.

QUADRO 4.17 – RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO DOS PESOS COM RESTRIÇÃO DE EQUIPAMENTO I

<b>Peso</b> \ <b>Restrição</b>	$p_i \leq 0,64$
$p_1$	0,60871371858098
$p_2$	0,60957631858364
$p_3$	0,60897520799682
$p_4$	0,60962533783964

Pode-se observar que a solução ao problema foi obtido, sendo que todos os pesos satisfazem a restrição pré-estabelecida para a precisão da observação. Os pesos apresentados no quadro 4.17 satisfazem simultaneamente os critérios de precisão para os parâmetros bem como a restrição para a precisão da observação.

#### 4.2.1.1.2 Restrição aos pesos quanto à confiabilidade das observações

Neste experimento os pesos foram obtidos mantendo a precisão anterior aos parâmetros,  $\mu_1 = 2$  e  $\mu_2 = 0,5$ , e fixando-se um número mínimo para a redundância parcial de cada observação. A redundância mínima foi obtida por critérios de confiabilidade externa dada pela relação (3.41) mediante as seguintes considerações:

- 1)  $\delta_{x,m\acute{a}x} = 8$  seguindo a relação (3.48);
- 2) Obtenção do parâmetro de não centralidade  $\delta_0$  para a rede planejada.

Considerando que para o teste global, após a rede ser ajustada, será utilizado como nível de significância o valor  $\alpha = 0,05$  e que para esta rede o número de redundância é  $r = 2$ , usando os monogramas de BAARDA (Anexo) para  $\beta_0 = 0,80$  estima-se um valor para a probabilidade  $\alpha_0 = 0,023$  com isto calcula-se o parâmetro de não centralidade pela relação (2.98), com isto,  $\delta_0 = 3,11502$ .

Com estas considerações consegue-se o número de redundância mínimo para a controlabilidade externa pela relação (3.41) que é

$$r_{i,E,min} = 0,132.$$

Desta forma as restrições aos pesos, em cada passo do método de Lagrangeano Aumentado, são obtidas pela relação (3.46) adicionando-se ainda restrições de não negatividade como estabelecido no problema P4. O resultado final obtido para a otimização com restrições de confiabilidade utilizando o método de Lagrangeano Aumentado com a penalidade **tipo 1** está apresentado no quadro 4.18.

QUADRO 4.18 – OTIMIZAÇÃO DOS PESOS COM RESTRIÇÃO DE CONFIABILIDADE

<b>Peso</b> \ <b>Restrição</b>	$p_i \leq \frac{1 - r_{i,E,min}}{q_{\hat{\ell}_i}}$
$p_1$	0,67232228862861
$p_2$	0,63357119869221
$p_3$	0,63498553219649
$p_4$	0,55912094950060

Os resultados apresentados no quadro 4.18 mostram-se satisfatórios quanto à aplicação do algoritmo de Lagrangeano Aumentado nas restrições dos pesos, obtendo-se para o projeto da rede tanto os critérios de precisão para a rede representada pelos valores próprios da matriz de covariâncias, quanto os critérios de confiabilidade e positividade impostos para cada observação. Com o resultado da otimização dos pesos colocados no quadro 4.18 são obtidos os seguintes números de redundância para cada observações como mostra o quadro 4.19.

QUADRO 4.19 – NÚMERO DE REDUNDÂNCIA EM FUNÇÃO DOS PESOS OBTIDOS NO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO I

<b>Redundância</b>	<b>valor</b>
$r_1$	0,29007087268887
$r_2$	0,61793358280930
$r_3$	0,41321899344387
$r_4$	0,67877655105796

Observando o quadro 4.19 nota-se que o número de redundância obtido para cada observação satisfaz o critério de redundância mínimo que é  $r_{i,E,min} = 0,132$



estabelecido para o projeto. Os pesos que satisfazem simultaneamente o critério de precisão para os parâmetros e o de confiabilidade para a rede estão apresentados no quadro 4.19.

No quadro 4.20 estão apresentados os valores, para a medida da confiabilidade externa geral, calculados pela relação (2.109) em função dos valores colocados no Quadro 4.16 e  $\delta_0 = 3,11502$ .

QUADRO 4.20- VALORES CALCULADOS PARA A CONFIABILIDADE EXTERNA GERAL I

<b>Confiabilidade externa geral</b>	$\delta_x = \lambda_{0i} = \delta_0 \sqrt{\frac{1-r_i}{r_i}}$
$\lambda_{01}$	4,8732
$\lambda_{02}$	2,4494
$\lambda_{03}$	3,7120
$\lambda_{04}$	2,1429

O quadro 4.20 mostra que os resultados atendem ao critério estabelecido para a confiabilidade externa geral,  $\delta_{x,\max} = 8$ , no planejamento do levantamento, visto que o número de redundância mínimo para cada observação foi alcançado. Desta forma tem-se uma rede precisa e confiável segundo os critérios estabelecidos no planejamento.

#### 4.2.1.1.3 Restrição aos pesos definindo um número de redundância mínimo

Neste tópico o projeto de rede anterior é planejado mantendo-se a precisão pré-definida para os parâmetros,  $\mu_1 = 2$  e  $\mu_2 = 0,5$ , e definindo-se um número de redundância mínimo que cada observação deve satisfazer, sem o uso das relações

(3.35) ou (3.42). Impõem-se à solução do projeto a condição que  $r_{i,\min} = 0,3$ , ou seja, a menor redundância que cada observação deve apresentar é 0,3. Nesta situação a restrição aos pesos é dada por  $p_i \leq \frac{1 - r_{i,\min}}{q_{\hat{\ell}_i}}$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ . O método de

Lagrangeano Aumentado foi aplicado utilizando a penalidade **tipo 1** e os pesos obtidos para esta situação estão colocados no quadro 4.21

QUADRO 4.21 – OTIMIZAÇÃO DOS PESOS COM RESTRIÇÃO DE CONFIABILIDADE

$$r_{i,\min} = 0,3$$

<b>Peso</b> \ <b>Restrição</b>	$p_i \leq \frac{1 - 0,3}{q_{\hat{\ell}_i}}$
$p_1$	0,77665703138380
$p_2$	0,93098709144573
$p_3$	0,46703327071589
$p_4$	0,32532281619305

Os pesos obtidos no quadro 4.21 satisfazem tanto o critério de precisão para os parâmetros como as restrições impostas aos pesos.

Com o resultado da otimização dos pesos colocados no quadro 4.21, aplicado à relação (2.78), foram alcançados os seguintes números de redundância para cada observação como mostra o quadro 4.22.

QUADRO 4.22 – NÚMERO DE REDUNDÂNCIA PARA OS PESOS OBTIDOS NO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÃO  $r_{i,\min} = 0,3$

Redundância	valor
$r_1$	0,32361659242196
$r_2$	0,62311353512085
$r_3$	0,41254086281949
$r_4$	0,64072900963770

Os resultados apresentados nos quadros 4.22 e 4.21 mostram que outros valores para a redundância mínima da observação podem ser planejados no processo de otimização dos pesos com restrições.

#### 4.2.1.1.3 Aplicação dos métodos restritos: Experimento 2

A seguir, no quadro 4.23, estão apresentados os resultados obtidos aplicando-se os métodos de minimização irrestrita LP, Newton com busca linear e Newton com região de confiança ao projeto anterior.

Os três métodos irrestritos foram aplicados ao sistema não-linear

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{p}) - 2 \\ \lambda_2(\mathbf{p}) - 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e os resultados estão apresentados no quadro 4.23

QUADRO 4.23 – RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO DOS PESOS IRRESTRITA II

<b>Método</b> <b>Peso</b>	<b>LP</b>	<b>Newton com busca linear</b>	<b>Newton com região de confiança</b>
$p_1$	0,65885277931846	0,67176534168201	1,11952569558984
$p_2$	0,59956970333371	0,59701036526655	1,90837349795631
$p_3$	0,65631928027626	0,63930895361403	-0,08490279575055
$p_4$	0,58525823707158	0,59191533943740	-0,44299639779561

Como no experimento 1 os três métodos irrestritos aplicados alcançaram solução para o critério de precisão para o levantamento. Comparando o quadro (4.23) com os quadros (4.17), (4.18) e (4.21) e os critérios utilizados verifica-se que nenhuma solução obtida por cada método satisfaz todas as restrições impostas para cada observação tanto no caso da restrição de precisão para a observação quanto de confiabilidade o que novamente justifica a aplicação dos métodos irrestritos. Como anteriormente pode-se aplicar algum método irrestrito e verificar se a solução satisfaz o critério de restrição, mas enfatiza-se que não há garantias que a solução irrestrita satisfará a restrição adotada.

## 5 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

### 5.1 CONCLUSÕES

A otimização dos pesos das observações geodésicas é realizável usando o critério baseado em valores próprios. O método obtém os pesos baseados em uma precisão pré-definida para a rede, precisão esta estabelecida sobre uma propriedade ótima para a matriz de covariâncias.

A estratégia proposta para a otimização dos pesos é baseada no valor próprio máximo para a matriz de covariâncias. Neste caso é necessário definir a precisão que será o limite para qualquer parâmetro estimado na rede o qual coincide com o valor próprio máximo da matriz de covariâncias dos parâmetros estimados. Para os demais valores próprios se exigirá somente que o conjunto todo seja homogêneo e isotrópico, condição esta que pode ser verificada baseando-se nos critérios de otimalidade para uma rede geodésica e pela aplicação do teste de igualdade de valores próprios.

Especificamente quando é utilizado um problema de valor próprio inverso para a obtenção dos pesos tem-se um problema não linear e a utilização dos algoritmos de otimização se faz necessário para melhorar as garantias de solução do problema. Considerando os métodos analíticos para a otimização dos pesos, as estratégias de baseadas em algoritmos de otimização matemática apresentam resultados satisfatórios no processo de otimização.

A otimização dos pesos com base em um problema de valor próprio inverso tem seus resultados ampliados quando métodos globalizados são aplicados na sua solução, em especial, o método LP que é específico para esta situação.

De forma geral os algoritmos, método de Newton com busca linear ou região de confiança e o método LP podem ser utilizados na busca pela solução do problema.

Nos experimentos verificou-se que o problema dos pesos solucionado pelo método LP alcança solução com um número menor de iterações comparativamente com o método de Newton com busca linear e região de confiança.

Nas aplicações o método que obteve os melhores resultados, do ponto de vista do número de iterações, foi o método LP que em todos os casos obteve solução com

menos iterações em relação ao Método de Newton. Provavelmente deve-se ao fato deste método ser exclusivo para um problema de valor próprio inverso e de não necessitar derivadas primeiras e nem de derivadas segundas forçando o método a ser “estável” em todos os passos da iteração. Fato que pode não ocorrer com os métodos que se utiliza, de derivadas segundas haja vista a equação (3.14) não estar definida para valores próprios iguais fato que pode ocorrer em algum passo do processo iterativo.

A situação acima justifica a aplicação do teste de igualdade dos valores próprios antes do processo de otimização, ou seja, escolhem-se valores próprios iguais entre si sob um nível de significância possibilitando que mesmo assim a equação (3.14) esteja definida o que não ocorreria se os valores próprios fossem escolhidos absolutamente iguais entre si.

Os pesos negativos que podem aparecer na solução do problema podem ser tratados de duas formas:

- 1) Os pesos negativos indicam que a observação não coopera para a precisão final da rede então estas observações podem ser retiradas do projeto da rede, condicionado ao número de redundância do sistema;
- 2) As observações que apresentam pesos negativos podem ser realizadas em campo com instrumento menos exigentes, que a precisão final para os parâmetros não sofrerá alteração significativa.

A situação dois fundamenta-se no fato que a solução do método irrestrito é uma solução de referência visto que qualquer peso maior que o indicado pela solução conduz a uma situação melhor que a indicada pela precisão pré estabelecida.

O problema de otimização de redes geodésicas é ampliado quando são impostas aos pesos restrições ligadas à precisão da observação ou então aos critérios de confiabilidade da observação.

Os experimentos mostram que é possível obter pesos que contemplem critérios de precisão para a observação e ainda critérios de confiabilidade. De forma geral se pode obter uma rede que é somente precisa ou somente confiável.

Quando aos pesos é imposta alguma restrição de confiabilidade é possível obter um projeto de rede preciso e confiável. Uma possibilidade de solução para esta situação é a aplicação do método de Lagrangeano Aumentado, cuja solução satisfaz os dois critérios simultaneamente: precisão para os parâmetros e confiabilidade para a observação.

Utilizou-se a penalidade **tipo 1** para formação da função Lagrangeano Aumentado e para minimizar o subproblema o método de Newton com região de confiança o qual mostrou-se com melhor eficiência para este fim comparativamente ao método com busca linear.

Com base nos resultados concluiu-se que é possível planejar uma rede geodésica que atenda a especificações de precisão para rede e confiabilidade para a observação, sendo os algoritmos de otimização matemática ferramentas úteis para alcançar estes objetivos satisfatoriamente.

Com base nos experimentos se estabelece que, em ordem de eficiência, o melhor método para solução irrestrita de um problema de valor próprio inverso aplicado ao problema de otimização dos pesos das observações geodésicas é o método LP.

## 5.2 RECOMENDAÇÕES

Recomenda-se estabelecer outros critérios para o custo visto que nem sempre o menor somatório conduz a melhor solução visto que pode haver variação na seleção do instrumento quando analisada a solução obtida pelo processo de otimização.

Recomenda-se para trabalhos futuros verificar a possibilidade de relacionar os pesos obtidos em um processo de otimização com os pesos que podem ser obtidos por instrumentos disponíveis para o levantamento.

Recomenda-se para trabalhos futuros também a aplicação de outros métodos que possam ser viáveis na otimização de pesos.

## REFERÊNCIAS

- AMIRI-SIMKOOEEI, A. (2004). A new method for second order design of geodetic networks: aiming at high reliability. **Survey Review**, v. 37, n. 293. pp.552-560.
- AMIRI-SIMKOOEEI, A.(2001).Strategy for designing geodetic network with high reliability and geometrical strength. **Journal of Surveying Engineering**, v. 127, n. 3. pp.104-117.
- AMIRI-SIMKOOEEI, A.; ALI SHARIFI, M.(2004).Approach for equivalent accuracy design of different types of observations. **Journal of Surveying Engineering**, v. 130, n. 1.
- BAARDA, W. (1968). **A testing procedure for use in geodetic networks**. Netherlands Geodetic Commision. Publications on Geodesy. New Series, Delft, v. 2, n. 5.
- BAARDA, W. (1977). **Measures for the accuracy of geodetic networks**. Paper IAG SSG 4.14. artigo apresentado no Simpósio Internacional de Projetos e Computação de Controles de Redes, Sopron, 1977.
- BRONSON, R. (1993). **Matrizes**. Lisboa: McGaw-Hill.
- CHEN, X; CHU, M. T.(1996). On least square solution of inverse eigenvalue problem. **SIAM Journal Numerical Analyses**. v. 33 n. 6. pp. 2417-2430.
- CHYZANOSWIKI, A.(1977). **Design and erros analysis of surveying projects**. Lectures Notes. v. 47, Department of Surveying Engineering. University of New Brunswick.
- COSTA NETO, P. L. O. (1977). **Estatística**. 17. reimpressão. São Paulo: E. Blücher.
- DALMOLIN, Q. (2002). **Ajustamento por mínimos quadrados**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná. CPCG, 176 pp.
- DENNIS Jr., J. E.; SCHNABEL, R. B. (1983). **Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.



DEREN, L.; YONGQIAN, Z. (1991). Optimization and design of geodetic network in consideration of accuracy and reliability. **Allgemeine Vermessung-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 91, n. 8, p. 27-33.

DUPRAZ, H. ; NIEMEIER, W. (1981). **Beurteilungskriterien für Geodätischer Netze**. In: Beiträge zum II. Internationalen Symposium über Deformationsmessungen mit Geodätischen Methoden. Bonn 25-28. September 1978. Herausgegeben von Ludger Hallermann, Bonn. Stuttgart: Wittwer, S., 386-400.

FRIEDLAND, S.; NOCEDAL, J.; OVERTON, M. L. (1987). The formulation and analysis of numerical methods for inverse eigenvalue problems. **SIAM J. Numer. Anal.**, v. 24, n. 3, p. 634-667.

GARNÉS, S. J. A. (2001). **Resolução das ambigüidades GPS para linhas de base curta: análise dos algoritmos de otimização**. Curitiba, 2001. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Departamento de Geociências, Universidade Federal do Paraná

GARNÉS, S. J. A. (1996). **Ajustamento paramétrico por mínimos quadrados com análise na estabilidade da solução**. Curitiba, 2001. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Departamento de Geociências, Universidade Federal do Paraná

GEMAEL, C. (1994). **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná.

GRAFAREND, E. W. ; SCHAFRIN, B. (1979). Kriterion-matrizen I-zweidimensional homogene und isotropoe geodatische netze. **Zeitschrift Für Vermessungswesen**. v. 4 pp. 133-149.

HELMERT, F.R. (1868). Studien über rationelle Vermessungen im Gebiet der höheren Geodäsie. **Z. Math. Phys. Schlömilch**. v. 13 pp 73-120 e 163-168.

JACKSON, J. E. (1991). **A user's guide to principal components**. New York. J. Wiley.

JÄGER, R. (1988). Analyse und Optimierung geodätischer Netze nach spektralen Kriterien und mechanische Analogien. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 342.

JUNG, I. (1924). Über die günstigste Gewichtsverteilung in Basisnetzen. **Akadem. Abh.** Uppsala 1924

JUSSIANI, L.F.(2004). **Desempenho do método de Lagrangeano Aumentado com penalidade quadrática**. 96 f. Dissertação ( Mestrado em Ciências), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2004.

KALTENBACH, H. (1992). Optimierung geodätischer Netze mit spektralen Zielfunktionen. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 393.

KAVOURAS, M. (1982). **On detection of outliers and the determination of reliability in geodetic networks**. Fredericton: University of New Brunswick, Department of Surveying Engineering. Technical Report, n. 87.

KUANG, S. (1996). **Geodetic network analysis and optimal design: concepts and applications**. Chelsea: Ann Arbor Press.

LEICK, A. (1995). **GPS Satellite Surveying**. John Wiley & Sons, Inc: New York.

MARTINEZ, J. M.; SANTOS, S. A. (1995). **Métodos computacionais de otimização**. In: Colóquio Brasileiro de Matemática, 20, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada . 24-28 julho, 256 pp.

MATIOLI, L.C.(2001). **Uma nova metodologia para construção de funções de penalização para algoritmos de Lagrangeano Aumentado**. 81 f. Tese ( Doutorado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.

MIERLO, J. van. (1981). Second order design: precision and reliability aspects. **Allgemeine Vermessung-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 88, n. 3, p. 95-105.

MIKHAIL, E. M.; GRACIE, G. (1981). **Analysis and adjustment of survey measurements**. New York: Van Nostrand Reinhold.

MORAES, C. V. (1998) Análise de erros grosseiros e confiabilidade de redes geodésica. **Cartografia e Cadastro** nº 8 .

MORAES, C. V. (2001). **Aprimoramento da concepção do modelo geodésico para a caracterização de extremas no espaço geométrico**. Curitiba. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Departamento de Geociências, Universidade Federal do Paraná.

MÜLLER, Von H. (1986). Zur Berücksichtigung der Zuverlässigkeit bei der Gewichtsoptimierung geodätischer Netze. **Zeischrift für Vermessungsweswn**, v. 111, n. 4, p. 157-169.

MÜRLE, M.; BILL, R. (1984). **Zuverlässigkeits – Genauigkeits- untersuchung eberner geodätischer Netze**. Allgemeine Vermessungs- Nachrichten, Karlsruhe, v.91, n.2,p. 45-62.

NINKOV, T. ; SCHMITT, G.(1983) Eine Methode Gewichtsoptimierung in geodätischen Netzen. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 90, n. 6 , p. 216-222.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S.T. (1999). **Numerical optimization**. Springer series in operations researche. Springer-Verlag New York. 635 pp

OLIVEIRA, R. (2003). **Otimização dos pesos das observações geodésicas pelo problema de valor próprio inverso**. Curitiba, 2003. Dissertação de Mestrado. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, 95 pp.

OLIVEIRA, R. (2005). **Otimização dos pesos das observações geodésicas considerando uma matriz critério de covariâncias e o problema de valor próprio inverso**: aplicação dos algoritmos de otimização matemática. Seminário II apresentado ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2005.

PELZER, H. (1980). Some criteria for the accuracy and the reability of networks. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série B, p.55-67.

SÁ, C. C. P. (1985). **Otimização de observações em redes geodésicas horizontais**. Rio de Janeiro, Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia de Sistemas) – Instituto Militar de Engenharia.

SANTOS JR, G. (2005). **Rede gravimétrica: novas perspectivas de ajustamento, análise de qualidade e integração de dados gravimétricos**. Curitiba, 2005. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Departamento de Geociências, Universidade Federal do Paraná.

SARTORIS, A. **Estatística e introdução à econometria**. São Paulo: Saraiva (2003).

SCHMITT, G. (1997). Spectral analysis and optimization of two dimensional networks. **Geomatics Research Australasia**. n. 67, p. 47-64.

SCHREIBER, O. (1882). Anordnung der winkelbeobachtung im Gottinger Basisnetz. **Zeitschrift Für Vermessungswesen**. v. 11. pp. 129-161.

SCHWIEGER, V. (2001). Zur Konstruktion synthetischer Kovarianzmatrizen. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart. n. 3, p. 143-150.

STOPAR, B. (2001). Second order design of horizontal GPS net. **Survey Review**, v. 36, n. 279, p. 44-53.

ZHANG, Z.; LI, X. (1990). A new optimization method for monitoring networks base don the sensitivity criterion. **Zeitschrift für Vermessungswesen**. Stuttgart, v. 115, n. 6, p. 247-255.

WOLF, H. (1961). Zur Kritik von Schereibers Satz uber die Gewichtsverteilung in Basisnetzen. **Zeitschrift Für Vermessungsweswn**. v. 86. pp. 177-179

WELSCH, W. ;HEUNECKE, O. ;KUHLMANN, H. (2000). **Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen**. Heidelberg: Wichmann. (Handbuch Ingenieurgeodäsie).

WANG, S.-G. & CHOW, S.-C. (1994). **Advanced Linear Models: Theory and Applications**. Dekker, New York.

**APÊNDICE A**  
**MÉTODO DE VARIAÇÃO DE COORDENADAS**  
**FÓRMULAS DIFERENCIAIS**

## APÊNDICE A -MÉTODO DE VARIAÇÃO DE COORDENADAS FÓRMULAS DIFERENCIAIS

O ajustamento pelo Método de Variação de Coordenadas enquadra-se no ajustamento de observações indiretas ou na forma paramétrica. Nele as coordenadas finais dos vértices são obtidas no próprio processo de ajustamento. As incógnitas são as correções a serem somadas às coordenadas provisórias dos vértices.

O método de variação de coordenadas pode ser interpretado como a aplicação da forma paramétrica do método dos mínimos quadrados à triangulação, trilateração ou à combinação de ambos.

As equações de observação, uma para cada observação, assumirão diferentes aspectos de acordo com a natureza da grandeza observada; dessa forma podem existir em um mesmo ajustamento, equações de observação relativas a distâncias, direções, ângulos e azimutes.

As equações de observação no método de variação de coordenadas representam um modelo matemático que envolve as incógnitas, que são as correções às coordenadas provisórias e a diferença entre os valores observados e calculados, de forma geral expressa por

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial}{\partial y_k} dy_k + \ell_i^0 - \ell_i^c, \quad (A1.1)$$

onde  $k$  representa o número de vértices,  $\ell_i^0$  valor observado da  $i$ -ésima equação e  $\ell_i^c$  valor correspondente calculado na  $i$ -ésima equação. O resíduo  $v_i$  é decorrente dos erros de observação os quais deverão ser minimizados.

Cada equação reúne, como incógnitas, as correções das coordenadas dos vértices envolvidos: dois vértices no caso de distância, azimuth ou direção observada ou três vértices no caso de ângulos. O termo independente de qualquer equação poder representado simbolicamente por

$$\ell_i^0 - \ell_i^c. \quad (A1.2)$$

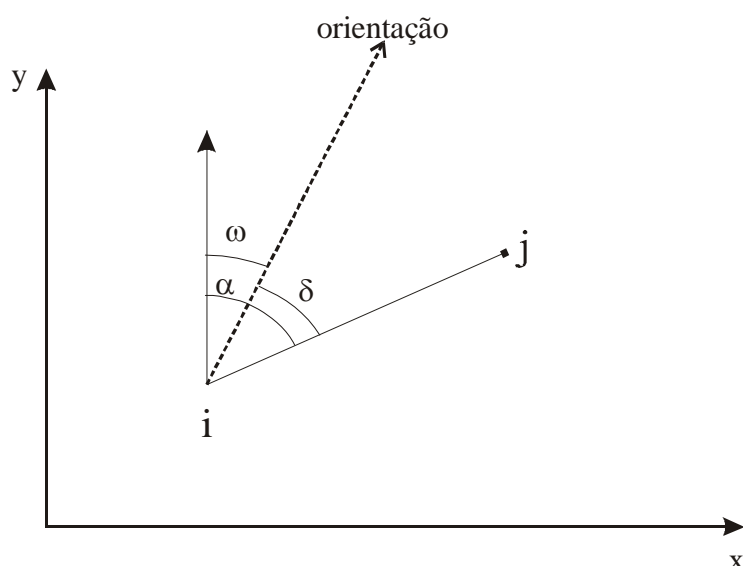
As equações normais são obtidas como na forma paramétrica, sendo o seu número igual ao número de vértices a determinar.

As fórmulas diferenciais usadas em Geodésia em termos da variação das coordenadas elipsóidicas podem ser encontradas em GEMAEL (1994, p.216). O desenvolvimento das fórmulas a seguir está em função da variação de coordenadas planas que constam de CHRZANOSWKI (1977, p. 22). As equações de observação apresentadas representam seus respectivos modelos funcionais.

### 1) Observação de distância entre os pontos i e j

Da figura A1

FIGURA A1 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO AZIMUTE DA DIREÇÃO i - j



$$s_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (A1.3)$$

e sua expressão diferencial é dada por

$$ds_{ij} = \frac{(x_j - x_i)}{s_{ij}} dx_j + \frac{(y_j - y_i)}{s_{ij}} dy_j - \frac{(x_j - x_i)}{s_{ij}} dx_i - \frac{(y_j - y_i)}{s_{ij}} dy_i \quad (A1.4)$$

### 2) Observação de azimute entre i e j

Da figura A1 decorre,

$$\alpha = \arctan\left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}\right) \quad (\text{A1.5})$$

e a expressão diferencial

$$ds = \frac{(x_j - x_i)}{s_{ij}^2} dx_j - \frac{(y_j - y_i)}{s_{ij}^2} dy_j + \frac{(x_j - x_i)}{s_{ij}^2} dy_i - \frac{(y_j - y_i)}{s_{ij}^2} dx_i \quad (\text{A1.6})$$

### 3) Observação da direção entre i e j

Decorre da figura A1 que,

$$\theta = \alpha - \omega = \arctan\left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}\right) - \omega \quad (\text{A1.7})$$

diferenciando (A1.7) obtém-se,

$$ds = \frac{(x_j - x_i)}{s_{ij}^2} dx_j - \frac{(y_j - y_i)}{s_{ij}^2} dy_j + \frac{(x_j - x_i)}{s_{ij}^2} dy_i - \frac{(y_j - y_i)}{s_{ij}^2} dx_i - d\omega \quad (\text{A1.8})$$

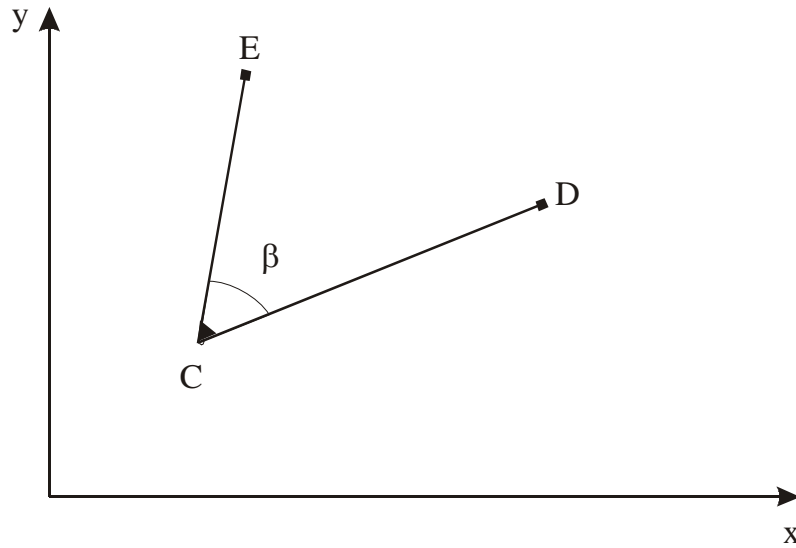
O ângulo de orientação  $\omega$  adiciona uma incógnita a mais, em consequência uma coluna a mais na matriz **A** com coeficiente igual a  $-1$  para cada grupo de direções medidas.

### 4) Observação de ângulo

Na figura A2, considera-se o ponto E com coordenadas  $(x_e, y_e)$  como ponto visado à esquerda do ponto C, e o ponto D cujas coordenadas é representado por  $(x_d, y_d)$  como ponto visado à direita de C



FIGURA A2 – OBSERVAÇÃO DE ÂNGULO



$$\beta = \alpha_d - \alpha_e = \arctan\left(\frac{x_d - x_e}{y_d - y_c}\right) - \arctan\left(\frac{x_e - x_c}{y_e - y_c}\right) \quad (A1.9)$$

e a correspondente expressão diferencial

$$d\beta = \frac{(y_d - y_c)}{s_d^2} dx_d - \frac{(x_d - x_e)}{s_d^2} dy_d - \frac{(y_e - y_c)}{s_e^2} dx_e + \frac{(x_e - x_c)}{s_e^2} dy_e + \left( \frac{(y_e - y_c)}{s_e^2} - \frac{(y_d - y_c)}{s_d^2} \right) dx_c + \left( -\frac{(x_e - x_c)}{s_e^2} + \frac{(x_d - x_c)}{s_d^2} \right) dy_c \quad (A1.10)$$

No caso de equação de observação de ângulo a constante de orientação é eliminada. Este fato decorre que a constante de orientação é a mesma para ambas as direções, resultando em

$$\beta = \alpha_d - \omega - (\alpha_e - \omega). \quad (A1.11)$$

$$\beta = \alpha_d - \omega - \alpha_e + \omega \quad (A1.12)$$

logo

$$\beta = \alpha_d - \alpha_e. \quad (A1.13)$$

Os coeficientes das equações são os elementos da matriz **A**. Nota-se que se uma observação é feita para um ponto fixo (considerado isento de erro) na rede, as

derivadas parciais de suas coordenadas são nulas e as colunas correspondentes na matriz **A** são omitidas.

**APÊNDICE B**  
**INVERSA GENERALIZADA E INVERSA GENERALIZADA DE MOORE-  
PENROSE**

## APÊNDICE B - INVERSA GENERALIZADA E INVERSA GENERALIZADA DE MOORE-PENROSE

### B.1 INVERSA ORDINÁRIA

Uma matriz quadrada  $\mathbf{A}$  de dimensão  $m \times m$  é não-singular ou regular ou inversível se existe uma única matriz  $\mathbf{B}$  de dimensão  $m \times m$  tal que  $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ . A matriz  $\mathbf{B}$  é denotada por  $\mathbf{A}^{-1}$ , e diz-se que  $\mathbf{B}$  é a inversa ordinária de  $\mathbf{A}$  e vale a relação:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (\text{B.1})$$

A partir do determinante da matriz  $\mathbf{A}$  e da matriz dos cofatores de  $\mathbf{A}$ , obtém-se sua inversa pela relação:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \mathbf{A}^*, \quad (\text{B.2})$$

onde  $\mathbf{A}^*$  denota a matriz cofatora de  $\mathbf{A}$ .

Observa-se a partir de (B.2) que se  $\det(\mathbf{A}) = 0$ ,  $\mathbf{A}$  não possui inversa ordinária.

### B.2 INVERSA GENERALIZADA E INVERSA GENERALIZADA DE MOORE-PENROSE

Seja  $\mathbf{A}$  uma matriz de dimensão  $m \times n$ . Qualquer matriz  $\mathbf{B}$  satisfazendo  $\mathbf{ABA} = \mathbf{A}$  é uma inversa generalizada de  $\mathbf{A}$ . Em geral uma inversa generalizada não é única.

Uma matriz  $\mathbf{B}$  é chamada inversa generalizada de Moore-Penrose de  $\mathbf{A}$  ou pseudo-inversa de  $\mathbf{A}$ , se satisfaz as quatro condições seguintes (RAO e MITRA, 1971, p. vii):

$$\mathbf{ABA} = \mathbf{A}, \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{BAB} = \mathbf{B}, \quad (\text{B.4})$$

$$(\mathbf{AB})^t = \mathbf{AB}, \quad (\text{B.5})$$

$$(\mathbf{BA})^t = \mathbf{BA}. \quad (\text{B.6})$$

A inversa generalizada de Moore-Penrose ou pseudo-inversa de  $\mathbf{A}$ , denotada pelo símbolo  $\mathbf{A}^+$ , existe para qualquer matriz  $m \times n$  e é única.

Propriedades da pseudo-inversa:

$$\mathbf{A}^+ \text{ é única} \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}, \text{ se } \mathbf{A} \text{ é não-singular,} \quad (\text{B.8})$$

$$(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}; \quad (\text{B.9})$$

$$(\mathbf{A}^t)^+ = (\mathbf{A}^+)^t; \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+ \mathbf{A} \mathbf{A}^t = \mathbf{A}^t; \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{A}^t (\mathbf{A}^+)^t \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^+)^t \mathbf{A}^t = \mathbf{A}^+; \quad (\text{B.12})$$

$$(\mathbf{A}^t \mathbf{A})^+ = \mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^+)^t; \quad (\text{B.13})$$

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^t = \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \mathbf{A}^t)^+; \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbf{a}^+ = \frac{\mathbf{a}^t}{\|\mathbf{a}\|_2^2} = \frac{\mathbf{a}^t}{\mathbf{a}^t \mathbf{a}}, \text{ se } \mathbf{a} \text{ é um vetor não nulo.} \quad (\text{B.15})$$

Nas Ciências Geodésicas a pseudo-inversa é usada em redes livres, ou seja, uma rede que possa ser ajustada sem a fixação de nenhuma injunção inicial. A rede livre produz singularidade na matriz das equações normais, isto é, não admite a inversa ordinária.

Um algoritmo numericamente estável baseado na decomposição de valor singular, para obter a inversa generalizada de Moore-Penrose ou pseudo-inversa de uma matriz qualquer  $\mathbf{A}$  é descrito pelas seguintes considerações:

Para qualquer matriz  $\mathbf{A}$ , não necessariamente quadrada, o produto  $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$  apresenta valores próprios não negativos. A raiz quadrada positiva de cada um destes valores próprios é chamado de valor singular de  $\mathbf{A}$ . Além disso, existem matrizes unitárias  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  tais que é válida a relação,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^t \quad (\text{B.16})$$

onde  $\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal tendo na diagonal principal todos os valores singulares positivos da matriz  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{0}$  é uma matriz onde todos seus elementos são zero. A matriz bloco,

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

é do mesmo tipo da matriz  $\mathbf{A}$  e, em consequência, é quadrada somente quando  $\mathbf{A}$  é quadrada.

A decomposição (B.16) gera uma fórmula numericamente estável para obtenção da pseudo-inversa como,

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^t \quad (\text{B.18})$$

a qual pode ser simplificada para

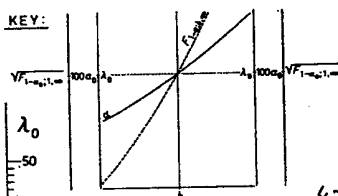
$$\mathbf{A} = \mathbf{V}_1 \mathbf{D}^{-1} \mathbf{U}_1 \quad (\text{B.19})$$

onde as colunas de  $\mathbf{V}_1$  são os vetores próprios que correspondem aos valores próprios positivos e  $\mathbf{U}_1 = \mathbf{A} \mathbf{V}_1 \mathbf{D}^{-1}$ .

**ANEXO**  
**MONOGRAMAS**

$\beta_0 = 0.70$

KEY:



$$\lambda_0 = \lambda \{ \alpha_0, \beta_0 = 0.70, 1, \infty \} = \lambda \{ \alpha, \beta_0 = 0.70, b, \infty \}$$

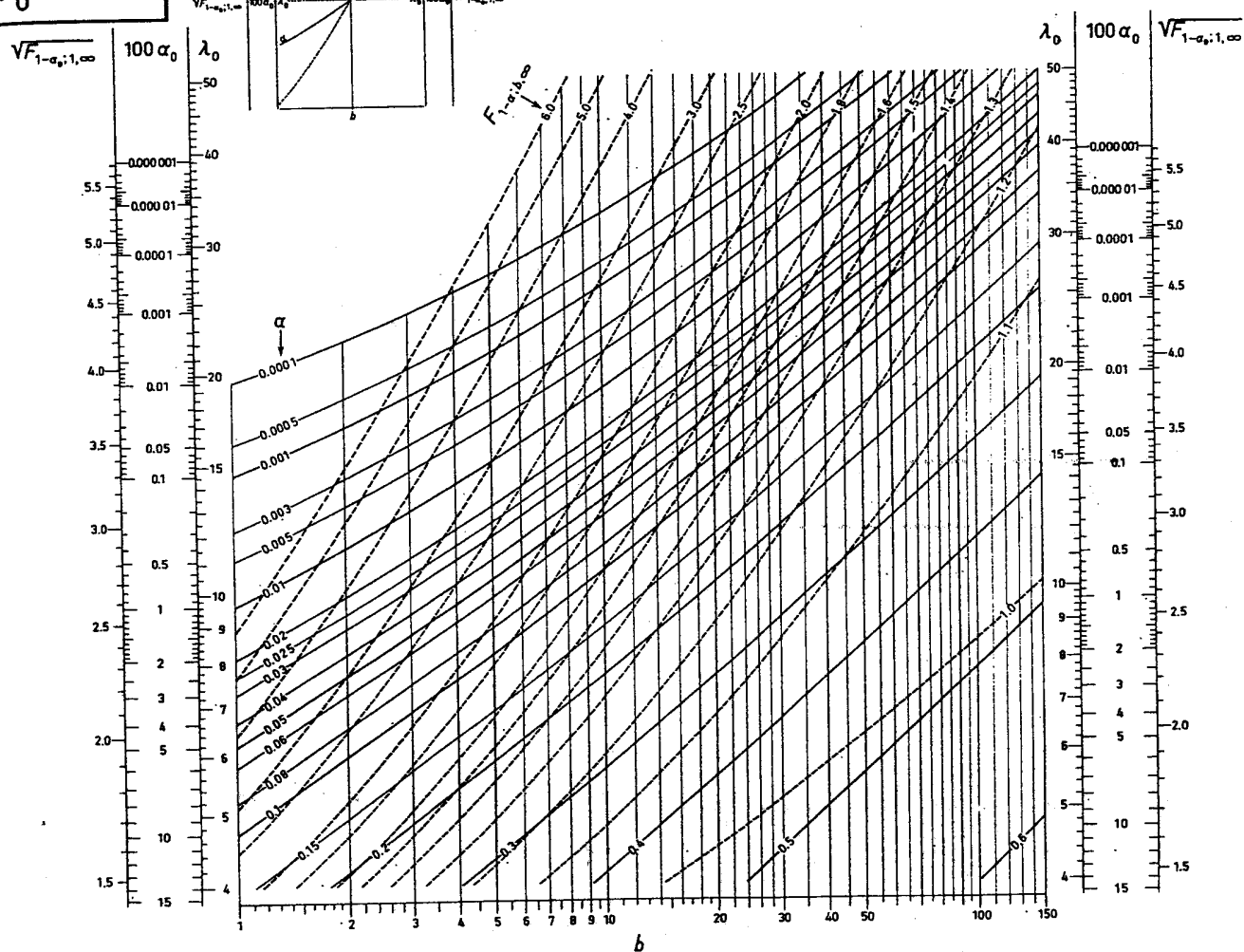
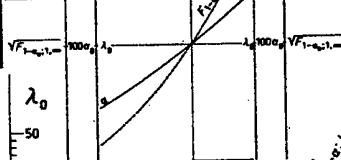


Fig. 3-3a



$\beta_0 = 0.80$

KEY:



$$\lambda_0 = \lambda \{ \alpha_0, \beta_0 = 0.80, 1, \infty \} = \lambda \{ \alpha, \beta_0 = 0.80, b, \infty \}$$

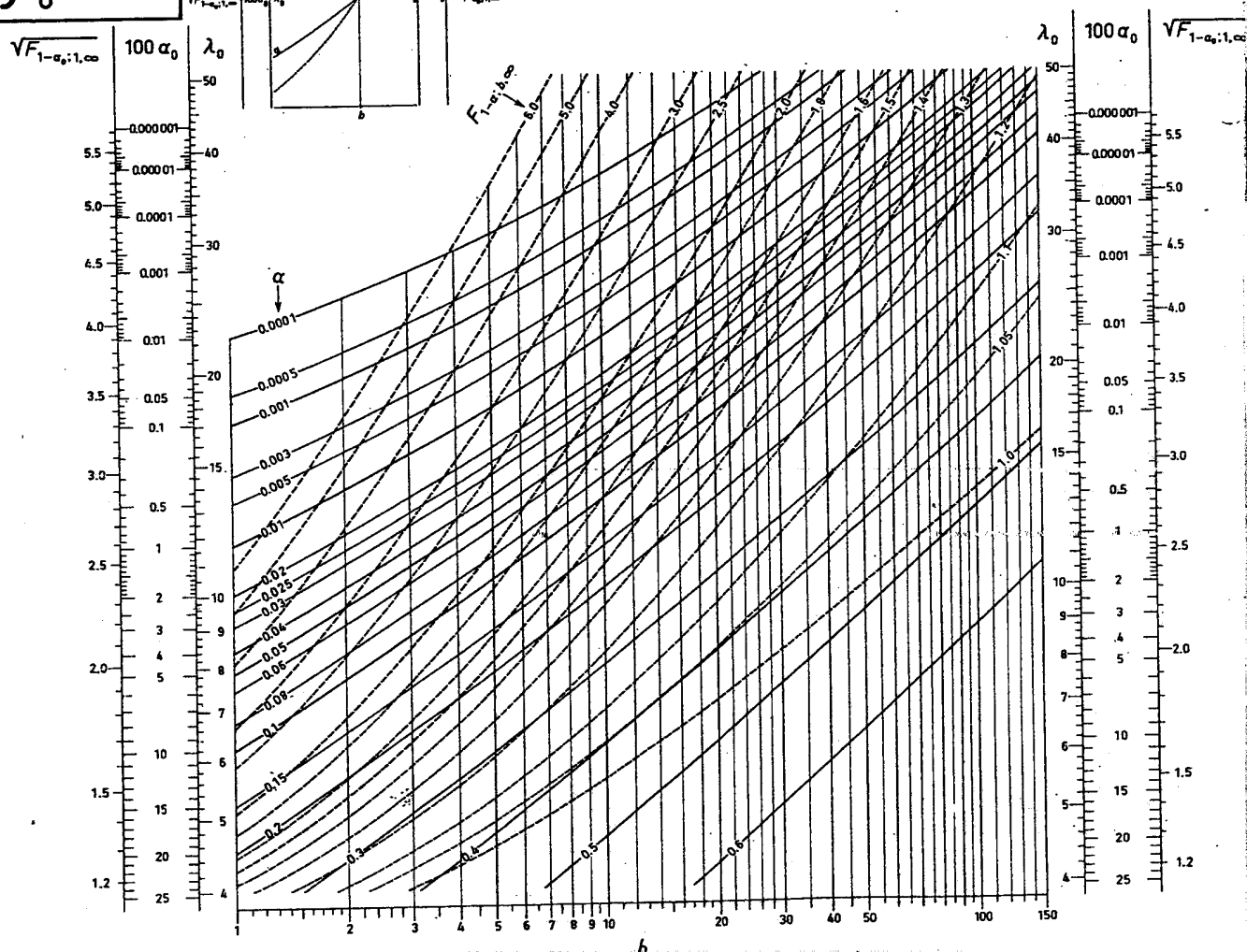
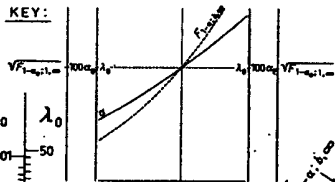


Fig. 3-3b

$\beta_0 = 0.90$

KEY:



$$\lambda_0 = \lambda\{\alpha_0, \beta_0 = 0.90, 1, \infty\} = \lambda\{\alpha_0, \beta_0 = 0.90, b, \infty\}$$

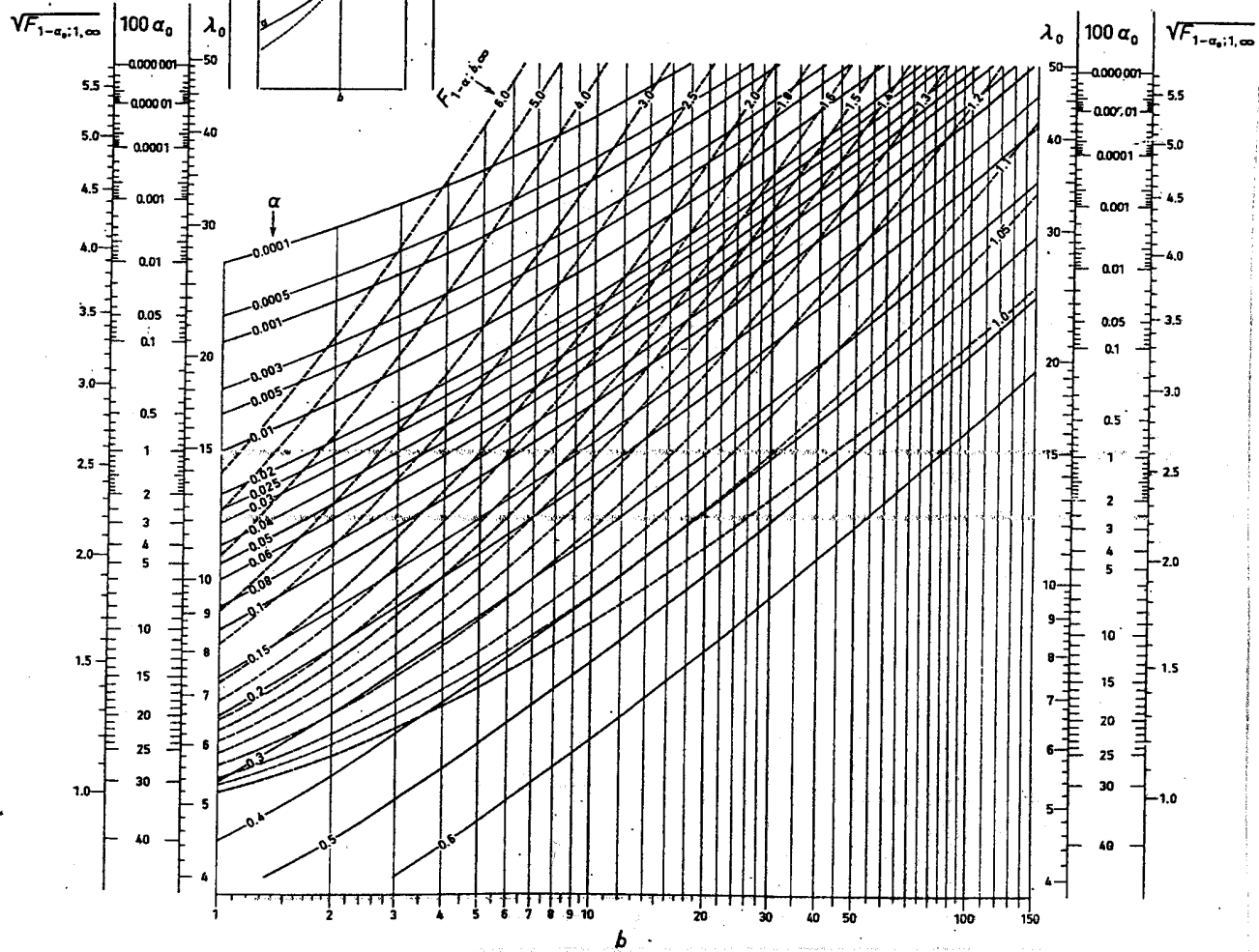


Fig. 3-3c